

MATEMATISKE MODELLER FOR TRAFIK

P1-projekt, 8. oktober - 18. december 2001
Projektgruppe B337



TITEL:

Matematiske modeller for trafik.

TEMA:

Virkelighed og modeller.

PROJEKTPERIODE:

P1, 8. oktober - 18. december, 2001

PROJEKTGRUPPE:

0134, B337

GRUPPEMEDLEMMER:

Anders Gorst-Rasmussen
Lea Mwelwa Grønager
Lars Hornbæk Jensen
Dorte Klerke
Charlotte Kramer

VEJLEDERE:

Kim Emil Andersen
Helle Algreen-Ussing

OPLAGSANTAL: 12

SIDEANTAL: 85

BILAGSANTAL OG -ART: 0

AFSLUTTET DEN: 18/12 - 2001

SYNOPSIS:

I denne rapport behandles spørgsmålet, hvorvidt det er muligt at opstille anvendelige matematiske modeller for trafik. Dette undersøges ud fra en praktisk vinkel, idet en simpel model udvikles fra bunden og vurderes ud fra dens forudsigelser i en række semipraktiske situationer. Desuden overvejes modelanvendelsen i Danmark med udgangspunkt i en undersøgelse af trafikplanlæggerens arbejde, og den sammenhæng han indgår i.

Gennem modeldannelsen og den efterfølgende undersøgelse viste vores teoretiske model sig utilstrækkelig i generelle trafiksituationer, men ud fra resultaterne vurderede vi, at den som grundlag for mere omfattende modeller var brugbar. Desuden viste det sig, at modelanvendelse i dansk trafikplanlægningen overvejende er begrænset til empiriske og praktiske overvejelser, samt at rent teoretiske modeller i en praktisk situation kun sjældent anvendes.

Forord

Denne rapport er udarbejdet af projektgruppe B337 som P1-projekt på den Teknisk- Naturvidenskabelige Basisuddannelse, Aalborg Universitet, under det overordnede tema “Virkelighed og modeller”. Rapporten indeholder tre overordnede dele — en teoretisk behandling, en kontekstuel del og slutteligt to appendicer med kortfattede gennemgange af vigtige resultater for det teoretiske arbejde. Referencer i parentes henviser til ligninger, mens der ved de øvrige hver gang angives, hvad der henvises til, såsom sætninger, figurer o.s.v. I rapporten forudsættes et kendskab til differentiallyigninger svarende til gymnasialt A-niveau.

Tak til trafikplanlægger Anker Lohmann-Hansen, Aalborg Universitet, for assistance i vores undersøgelse af trafikplanlæggerens arbejde.

Tak til vores hovedvejleder Kim Emil Andersen for stor tålmodighed og tak til bivejleder Helle Algreen-Ussing for mange konstruktive forslag i forbindelse med arbejdet omkring den kontekstuelle faglighed.

God fornøjelse med læsningen.

Anders Gorst-Rasmussen

Lea Mwelwa Grønager

Lars Hornbæk Jensen

Dorte Klerke

Charlotte Kramer

INDHOLD

1	Introduktion til problemstillingen	1
1.1	Problembeskrivelse og struktur	2
2	Trafikproblemet — grundlæggende modelovervejelser	3
2.1	En generel trafiksituation	3
2.1.1	Mikroskopiske og makroskopiske modelleringsmetoder	4
2.1.2	Reaktion og stimuli	5
2.2	Stimuli i en udvalgt trafiksituation	6
2.2.1	Den typiske landevejssituation	6
2.2.2	Determinisme vs. stokastik	9
2.3	En vurdering af modeldannelsen	10
3	Trafikplanlægning og modelanvendelse	13
3.1	Kontekstuel metode	13
3.2	Trafikplanlægning og samfundet	14
3.3	Trafikplanlæggere i Danmark	16
3.3.1	Planlægningsmodeller — udformning og metode	18
3.4	Et eksempel — den tredje Limfjordsforbindelse	20
3.4.1	Lindholmlinien	21
3.4.2	Udsortering af løsningsforslag — økonomi	23
3.4.3	Vurdering af den praktiske problemstilling	23
3.5	Et eksempel — automatiseret kørsel	24

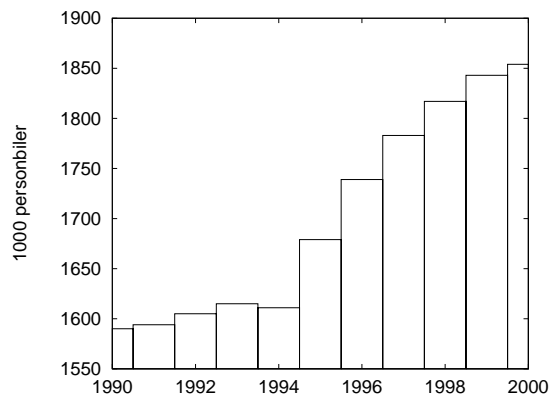
4	Introduktion til differentialligninger	27
4.1	Indførelse af differentialligninger	28
4.1.1	Den generelle differentialligning af n . orden	28
4.1.2	Vektorfunktioner	31
4.1.3	Systemer af differentialligninger — omskrivning	32
4.1.4	Eksistens og entydighed	33
4.1.5	Linearitetsbegrebet	34
4.2	En formel baggrund for trafikmodellerne	36
5	Andenordens lineære differentialligninger	39
5.1	Egenskaber for løsninger til den homogene ligning	39
5.1.1	Superposition	40
5.1.2	Linær (u)afhængighed	41
5.1.3	Wronski-determinanten	41
5.1.4	Generel Løsning	43
5.2	Homogene ligninger med konstante koefficienter	44
5.3	Inhomogene ligninger med konstante koefficienter	45
5.3.1	Generel løsning	46
5.3.2	Partikulær løsning	47
5.4	Den simple model	49
5.4.1	Eksempel med Maple	49
5.4.2	Tilfældet $n = 2$ med konstant fart for førerbilen	52
6	Førsteordens lineære systemer og stabilitet	57
6.1	Egenskaber for løsninger	58
6.1.1	Superposition og uafhængighed	58
6.1.2	Generel løsning af homogene differentialligningssystemer	59
6.2	Generel løsning til det homogene lineære system med konstante koefficienter	60
6.2.1	Løsning af systemet	60
6.2.2	Forskellige komplekse egenverdier	64
6.3	Stabilitetsanalyse	65
6.3.1	Stabilitet og parameterafhængighed	67
6.3.2	Begrænsninger på λT	69
6.4	Anvendelighed af model fra en praktisk vinkel	71
7	Konklusion	73
	Litteratur	75

A	Lineær algebra	77
A.1	Ligningssystemer på matrixform	77
A.1.1	Inverse matricer og determinanter	78
A.1.2	Det homogene lineære ligningssystem	79
B	Komplekse tal	81
B.1	Kort introduktion til komplekse tal	81

KAPITEL 1

Introduktion til problemstillingen

For det moderne menneske er motoriseret færdsel en vigtig del af hverdagen. Alene i Danmark oversteg antallet af køretøjer i 1997-1998 1,8 mio, og antallet er stadig stigende. Transportrådet vurderede i [Scen00], at biltrafikken vil stige med op til 50% frem til 2020.



Figur 1.1: Personbilbestanden i Danmark for årene 1990-2000 (kilde: [Stat01])

Sideløbende med denne udvikling vokser kravene til kvalitet og effektivitet af transporten. Sikkerhed spiller en større rolle end nogensinde, mens f.eks. miljøspørgsmålet i forbindelse med færdsel har været et aktuelt punkt på den politiske dagsorden de sidste mange år. Denne udvikling stiller meget høje krav til kvalitet og udformning af infrastrukturen generelt, men særligt til en udbygning af eksisterende vejnet og konstruktion af nye, hvor man både har høj kapacitet og stor effektivitet. En effektiv planlægningsproces kræver derfor et indgående kendskab til den

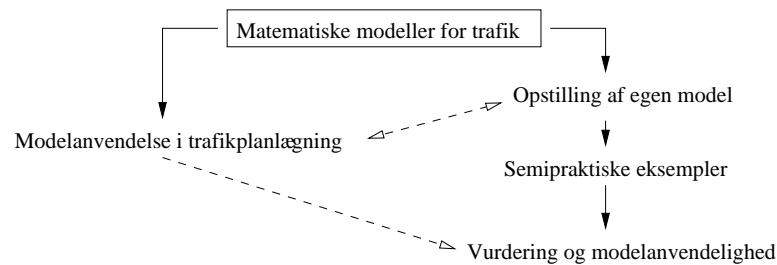
generelle opførsel for trafik i ofte meget specielle situationer. Denne indsigt vil i høj grad være empirisk baseret, men den beskrevne udvikling stiller nye krav til metoder, der kan effektivisere processen bag opnåelsen af indsigt om trafik i specialiserede og komplekse situationer. Hvis det var muligt at formulere præcise matematiske modeller, der kunne gengive grundlæggende karakteristika for sådanne komplicerede situationer, ville man have en effektiv metode til dele af planlægningsprocessen. V.h.a. teoretiske metoder vil man kunne danne sig en omfattende baggrundsindsigt, der vil kunne finde anvendelse i praktiske projekter. Med den øgede computerkraft, er der samtidig basis for at formulere beregningsteknisk komplicerede modeller uden tab af effektivitet. Men er det muligt at formulere brugbare matematiske modeller — og hvordan kan disse anvendes i den moderne planlægningsproces? Det er disse overordnede spørgsmål, der danner udgangspunkt for denne rapport.

1.1 Problembeskrivelse og struktur

Vi vil i rapporten, Kapitel 2, først opstille vores egen model ud fra simple overvejelser og kort vurdere denne samt anvendeligheden af denne modeltype for trafik generelt. Efterfølgende vil vi i Kapitel 3 se på anvendelsen af matematiske modeller i aktuel dansk trafikplanlægning. Hvornår anvendes de og hvorfor? Hvordan er forholdet mellem anvendelsen af teoretiske modeller og empiriske overvejelser i Danmark? Disse spørgsmål vil blive overvejet med udgangspunkt i en undersøgelse af den sammenhæng, der danner ramme om den typiske planlægningsproces.

Slutteligt vil vi i Kapitel 4, 5 og 6 give en teoretisk behandling af vores egen model. Denne vil blive anvendt på nogle få konstruerede, semipraktiske situationer, for derigennem at afdække visse af modellens egenskaber og mangler i en matematisk sammenhæng.

Jf. Figur 1.2



Figur 1.2: Opbygningen af denne rapport.

KAPITEL 2

Trafikproblemet — grundlæggende modelovervejelser

Vi vil i det følgende opstille en simpel model for trafik ud fra kvalitative overvejelser for relativt simple, konstruerede trafiksituationer. Formålet er dels at opstille selve den matematiske model, men også at danne et foreløbigt overblik over kompleksiteten af problemstillingen gennem vores egen systemafgrænsning og valg i modeldannelsen. Grundlæggende modelideer stammer fra [Wohl67, kap. 11].

2.1 En generel trafiksituation

Hvis man skal gøre sig noget håb om at opbygge en tilfredsstillende model for nogle områder af det generelle trafikproblem, er man nødt til at se nærmere på, hvad der *kendetegner trafik i den generelle form*. Som allerede nævnt er der tale om et meget komplekst fænomen, og det vil være alt for ambitiøst at forvente, at det er muligt at lave en model, der afspejler alle aspekter. Derimod kan det vise sig nyttigt at overveje den generelle trafiksituation på flere forskellige abstraktionsniveauer — og ud fra disse udvælge elementer, vi forventer ville være relevante, hvis modellen skulle afspejle bestemte tendenser.

Lad os opdele i tre forskellige *abstraktionsniveauer* startende med det laveste:

1. Det strengt teoretiske niveau — *et dynamisk system af objekter i indbyrdes afhængig bevægelse*, typisk langt fra en stabil tilstand (den stabile tilstand er bevægelse, hvor afstanden mellem køretøjerne er konstant, og disse bevæger sig med konstant fart).

2. Køretøjer, der manøvreres af en fører, som dels reagerer direkte med acceleration p.g.a. de øvrige køretøjers bevægelse, dels reagerer med en *stokastisk/tilfældig* faktor afhængig af den enkelte fører.
3. Køretøjer, som manøvreres af en fører, der reagerer på en række forskellige *stimuli*, først og fremmest betinget af den øvrige trafik, men også af de øvrige forhold i den givne situation, dels i relation til omgivelserne, dels til den enkelte fører.

Når vi skal vælge et udgangspunkt for modeldannelsen, er det mest nærliggende at starte på laveste og letteste tilgængelige abstraktionsniveau, det *teoretiske niveau*; og så senere overveje, hvilke faktorer fra højereliggende abstraktionsniveauer, der ville have været relevante og hvorfor.

2.1.1 Mikroskopiske og makroskopiske modelleringsmetoder

Indledende i denne modeldannelse er det vigtigt at gøre sig klart, hvordan man vælger at betragte trafik. Der er gjort rede for, at man på laveste abstraktionsniveau arbejder med et dynamisk system af indbyrdes afhængige objekter. Umiddelbart vil det være intuitivt mest nærliggende at videreføre systemet af individuelle størrelser i modeldannelsen, d.v.s. at overveje hvert køretøj for sig og i relation til de øvrige køretøjer — altså en *mikroskopisk tilgang*. Det er imidlertid vigtigt at bemærke, at denne tilgang først og fremmest sigter mod den kvalitative opførsel af systemet udelukkende i relation til køretøjerne og disses bevægelse. D.v.s. en mere praktisk orienteret anvendelse på bestemte strækninger, implementering af konkrete måledata m.m. vil næppe være relevant her. Dette er ikke nogen overraskelse, for det er en almindelig erfaring, at trafiks opførsel i en praktisk situation netop ikke kan generaliseres — de stokastiske faktorer har her en alt for stor indflydelse (jf. iøvrigt afsnit 2.2.2).

Omvendt kunne man vælge at se på systemet som en overordnet, sammenhængende størrelse (hvor indre fluktuationer er uinteressante) — den såkaldt *makroskopiske* tilgang. Denne vil give bedre muligheder for praktisk anvendelse på faktiske vejstrækninger, fordi det er nemmere at gøre empiriske slutninger om helheden fremfor specifikke dele i en konkret, generel situation. D.v.s. det er betydeligt lettere at passe rimelige både deterministisk og stokastiske modeller ind, når man kun vælger at betragte helheden.

Vi har dog ikke yderligere grundlag for at vurdere, hvilken tilgang der vil være mest relevant, men det ses umiddelbart, at der ved den makroskopiske metode går mange data tabt, eftersom vi undgår overvejelser om det enkelte køretøj. Da vi desuden er interesserede i en kvalitativ/teoretisk beskrivelse af trafik, *har den mikroskopiske model derfor størst appel, og vi vælger denne uden yderligere argumentation.*

Den mikroskopiske tilgang giver også den umiddelbare fordel, at vi har velkendte matematisk-fysiske størrelser til rådighed, de *kinematiske funktioner* for et objekt i bevægelse (makroskopisk skulle vi have gjort uddybende overvejelser om bevægelsen af en *trafikstrøm*). Vi kan nemlig anvende *sted*, *fart* og *acceleration* som funktion af tiden, hhv. $x(t)$, $v(t)$ og $a(t)$ — for det første abstraktionsniveau, objekter i indbyrdes afhængig bevægelse, bør dette faktisk være tilstrækkeligt, eftersom bevægelsen af ethvert objekt i den klassiske fysik kan fastlægges fuldstændig ved kendskab til en eller flere af dettes kinematiske funktioner (samt evt. begyndelsesværdier). Vi kan derfor allerede nu forlange, at modellen skal beskrive de *indbyrdes relationer* mellem køretøjernes kinematiske funktioner.

2.1.2 Reaktion og stimuli

Den typiske trafiksituation med et arbitrært antal køretøjer kan generelt betragtes som et dynamisk system langt fra ligevægtstilstanden, d.v.s. vi har typisk ikke stabilitet; nogle steder er der store huller, andre steder kødannelse. P.g.a. systemets komplicerede karakter kan vi heller ikke, som i mange situationer i fysikken, slutte, at der altid vil være tale om udvikling mod asymptotisk stabilitet (ligevægtstilstand efterhånden som tiden $t \rightarrow \infty$). Den stokastiske faktor i den faktiske situation bærer en stor del af årsagen hertil, men som vi skal se, er det også muligt at opstille deterministiske modeller, der afspejler denne opførsel. Et naturligt udgangspunkt er spørgsmålet — hvilke muligheder har elementerne (køretøjerne) for at reagere i forhold til hinanden, og under hvilke påvirkninger forekommer disse reaktioner?

På et helt overordnet, teoretisk niveau vil det være muligt for et køretøj at reagere på påvirkninger med arbitrær (begrænset af køretøjets fysik samt vejen) bevægelse i to dimensioner. Det er imidlertid indlysende, at så frie reaktionsmuligheder for det første ikke er realistiske og for det andet vil være uhyre vanskelige at beskrive generelt. Derfor vil vi simplificere til bevægelse i en enkelt dimension og desuden antage, at der ikke er mulighed for baneskift, samt at køretøjerne generelt “opfører sig pænt”¹ og følger trafikstrømmen. Dette forenkler problemet en hel del, eftersom bevægelse i én dimension udelukkende er betinget af acceleration (deceleration). D.v.s. ethvert køretøj har kun én reaktionsmulighed, acceleration.

Hvilke påvirkninger vil så medføre acceleration for et køretøj i en givet trafiksituation? For at besvare dette spørgsmål, må vi nødvendigvis forlade det rent fysiske abstraktionsniveau og undersøge relevansen af de indbyrdes påvirkninger fra andet abstraktionsniveau. I den deterministiske model må det forholde sig således, at enhver reaktion (acceleration) er afhængig af de påvirkninger, *stimuli*, som føreren af køretøjet modtager til tiden t , og kun disse. D.v.s. for køretøj m , $0 \leq m \leq n$, hvor køretøj 0 er det *forreste* køretøj, *førererkøretøjet*, og køretøj n det

¹Hermed menes, at de overholder færdelsloven og ikke laver pludselige, uventede manøvrer

bagerste — i en trafiksituation med $n + 1$ køretøjer gælder

$$[reaktion]_m = f_m(stimuli). \quad (2.1)$$

Disse stimuli opdelte vi i indledningen til Afsnit 2.1 i påvirkninger p.g.a. de øvrige køretøjers bevægelse samt en stokastisk faktor. En sådan opdeling er naturligvis ret grov, men samtidig nødvendig fordi en betydelig del af stimuli virkelig er stokastisk betinget. En hjort, der pludselig springer ud på vejen, eller måske bare uforvarende acceleration fordi føreren sidder i egne tanker er begge eksempler på den stokastiske påvirkning. Selvom den stokastiske faktor kan have stor betydning (uden denne ville vi ikke se mange trafikuheld), må det generelt forholde sig således, at bevægelser for et køretøj i trafiksituationen først og fremmest er betinget af de øvrige køretøjers bevægelse (Jf. iøvrigt Afsnit 2.2.2 for nærmere diskussion af stokastik overfor determinisme i trafik.), d.v.s. (2.1) tager den generelle form, i situationen med $n + 1$ køretøjer.

$$[reaktion]_m = f_m(x_i(t), v_i(t), a_i(t)), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Vi vil nu foretage en grundig undersøgelse af sådanne stimuli og afgrænse os til nogle få relevante, præcise empiriske slutninger for, hvad køretøjer egentlig reagerer på ved bevægelsen af den øvrige trafik. For at dette kan gøres på meningsfyldt vis, er vi imidlertid nødt til at indskrænke den generelle trafiksituation til noget mere specifikt. Vi kan naturligvis ikke forvente, at den indbyrdes afhængighed er ens på f.eks. en hovedvej i myldretiden og en øde landevej midt om natten.

2.2 Stimuli i en udvalgt trafi ksituation

For at sikre relevansen og mangfoldigheden af de forskellige stimuli i forbindelse med bevægelsen alene, har vi valgt at *konstruere den situation, vi ønsker at overveje*. Det skyldes først og fremmest, at de faktorer, vi vil/kan overveje er begrænset til en række konkrete trafiktilfælde; som vi skal se, kan disse overordnet samles under situationen *landevej med moderat/tæt trafik*. Det skal imidlertid straks bemærkes, at denne metode til modeldannelse ikke vil begrænse relevans og generalitet af vores senere resultater — vi ønsker jo at lave *kvalitative undersøgelser af trafik generelt v.h.a. matematiske modeller*. Derfor er det faktisk meget nærliggende at vælge et stereotyp trafik eksempels som netop en sådan landevej.

2.2.1 Den typiske landevejssituation

Lad os overveje en trafiksituation med $n + 1$ køretøjer i moderat/tæt trafik, d.v.s. en situation, hvor afstanden mellem to på hinanden følgende køretøjer er så relativt lille, at køretøjerne med

rette kan kaldes *afhængige*². Lad da $x_m(t)$, $v_m(t)$ og $a_m(t)$ være de kinematiske funktioner (stedfunktion, fartfunktion og accelerationsfunktion) for køretøj m , $0 < m \leq n$ (d.v.s. køretøj m kan *ikke* være førerkøretøj). Spørgsmålet er nu: Hvordan afhænger disse af de øvrige køretøjers kinematiske funktioner, $x_i(t)$, $v_i(t)$ og $a_i(t)$, $0 \leq i \leq n$, hvor $i \neq m$?

Lad os først indføre en begrænsning på i , så der kun er tale om *lokal afhængighed*. For det første gør dette problemet simplere, for det andet er det urealistisk at lade et køretøj være direkte afhængigt af samtlige foranliggende og bagvedliggende. Vi kan umiddelbart indse, at køretøj m typisk kun vil bevæge sig afhængigt af de foranliggende, d.v.s. vi forlanger at $0 \leq i < m$. Det kan argumenteres for, at denne afhængighed, alt afhængig af førerens forsigtighed, vil være begrænset til de første 3-4 foranliggende, men vi vil vælge at begrænse os til *afhængighed af køretøjet umiddelbart foran*. Lad os derfor forsøge at opstille de empiriske sammenhænge mellem de kinematiske funktioner for de to køretøjer for derved at opnå en præcis matematisk formulering.

1. Enhver reaktion på ændringer i forankørendes bevægelse til tiden t vil først optræde til tiden $t + T$, d.v.s. med en forsinkelse/reaktionstid $T \geq 0$.
2. Reaktion på *den relative afstand*. Hvis afstanden mellem køretøj m og $m - 1$ øges, vil køretøj m accelerere indtil opnåelse af maksimal fart, v_{max} . Vi må antage, at jo større afstand, jo større acceleration, d.v.s. vi kan opstille proportionalitetsforholdet

$$a_m(t) \propto x_{m-1}(t) - x_m(t),$$

(bemærk, at der her *ikke* er taget højde for, at der vil eksistere en vis sikkerhedsafstand Δx_{sikker}).

3. Tilsvarende, reaktion på *den relative fart*. Hvis køretøj $m - 1$ bevæger sig med højere fart end køretøj m , vil køretøj m accelerere indtil $v_{m-1}(t) - v_m(t) = 0$ eller v_{max} . Bemærk, at denne sammenhæng i høj grad minder om (og hænger sammen med) den tilsvarende med relativ afstand. Derfor kan vi opstille proportionalitetsforholdet

$$a_m(t) \propto v_{m-1}(t) - v_m(t).$$

4. Reaktion *relativt* i forhold til den relative afstand til forankørende. Jo tættere man er på forankørende, jo mere forsigtig vil man typisk være.
5. Reaktion *relativt* i forhold til egen fart. Jo hurtigere man bevæger sig, jo mere forsigtig vil man være, når man accelererer (også under deacceleration, af hensyn til de bagvedliggende).

²De nøjagtige betingelser for afhængighed, er ikke entydigt bestemt og afhænger af nærmere situationsspecifikke omstændigheder såsom vejr, vejens tilstand o.s.v.

Ovenstående er indtil videre tilstrækkeligt til at kunne opstille en model, men antagelserne kræver naturligvis nogen finpudsning og yderligere overvejelser. Vi vil opdele de enkelte faktorer i to typer, *fremmende* og *hæmmende* faktorer, som så kan kombineres i en endelig model. De fremmende faktorer lader vi være primært bestemmende for reaktionen, d.v.s. her kan f.eks. opstilles et direkte proportionalitetsforhold. Omvendt lader vi de hæmmende, sekundære faktorer være begrænsende for reaktionen p.g.a. den primære faktor, d.v.s. reaktion kan antages omvendt proportional hermed.

I den moderate/tætte trafiksituation kan vi argumentere for, at der kun er én fremmende faktor af betydning, den relative fart i forhold til forankørende. Reaktion direkte betinget af den relative afstand $\Delta x_{relativ}$ er usandsynlig, eftersom denne er så relativt lille; reaktion direkte betinget af egen fart er usandsynlig af samme grund — denne er sikkerhedsmæssigt betinget og får først indflydelse når den når en vis størrelse.

På baggrund af denne undersøgelse, kan modellen nu opstilles. Vi vil antage, at reaktionen er *proportional* med den relative fart i forhold til forankørende, hæmmet af den relative afstand (eller sagt på en anden måde, omvendt proportional med den relative afstand).

D.v.s. vi kan skrive

$$a_m(t + T) = \kappa \frac{v_{m-1}(t) - v_m(t)}{x_{m-1}(t) - x_m(t)}, \quad (2.2)$$

hvor κ er en proportionalitetskonstant. Det ligger i modelantagelserne, at $x_{m-1}(t) \geq x_m(t)$; derfor forlanges, at $\kappa > 0$, svarende til acceleration ($a_m(t + T) > 0$), hvis $v_{m-1}(t) > v_m(t)$ og deacceleration ($a_m(t + T) < 0$) såfremt $v_{m-1}(t) < v_m(t)$. Bemærk, at ligningen ikke indeholder eksplicitte overvejelser angående infrastrukturelle forhold som f.eks. hastighedsbegrænsninger. Disse indgår kun implicit i den forstand, at det antages, at førerkøretøjet overholder hastighedsbegrænsningerne, d.v.s. $v_0 \leq v_{max}$ (svarende til, at reaktionen/acceleration for bagvedliggende ophører når $v_i = v_0$).

Hvad kan vi så egentlig få ud af denne ligning? I første omgang hverken noget anvendeligt kvalitativt eller for den sags skyld kvantitativt. Men den repræsenterer det afgørende skridt i modeldannelsen, og sammenhængen mellem de kinematiske funktioner skal senere vise sig at kunne anvendes til at udtale sig om *stedfunktioner* for systemer med mange køretøjer. Med henblik på den forestående undersøgelse af ligning (2.2), er det imidlertid hensigtsmæssigt at simplificere kraftigt. For det første vil vi antage, at $T = 0$, d.v.s. at reaktion forekommer øjeblikkelig. Desuden antages, at den relative afstand *ikke* har nogen betydning; dette er en markant forenkling, der kun kan retfærdiggøres ved tilstrækkelig tæt trafik (hvor, igen, den relative afstand typisk er så lille, at den af sikkerhedsmæssige grunde ikke vil have indflydelse på reaktionen).

Vi har da ligningen

$$a_m(t) = \lambda(v_{m+1}(t) - v_m(t)), \quad (2.3)$$

svarende til

$$\begin{cases} a_1(t) &= \lambda(v_0(t) - v_1(t)) \\ a_2(t) &= \lambda(v_1(t) - v_2(t)) \\ &\vdots \\ a_n(t) &= \lambda(v_{n-1}(t) - v_n(t)), \end{cases}$$

hvor $v_0(t)$ er en kendt funktion og $\lambda > 0$ er en proportionalitetskonstant, som vi vil betegne *sensitivitetskoefficienten*; den er et mål for, hvor kraftigt et køretøj reagerer på en ændring i den relative fart. Vi vil ydermere antage, at λ har samme værdi for alle køretøjer i situationen — dette er naturligvis en forholdsvis grov generalisering, eftersom bilister typisk reagerer forskelligt. Imidlertid skal ovenstående vise sig at være et hensigtsmæssigt og tilstrækkeligt simpelt udgangspunkt for en analytisk behandling af mikroskopiske modeller for trafik.

Dog vil vi nu kort argumentere for vort valg af en deterministisk fremfor stokastisk tilgang til det mikroskopiske problem.

2.2.2 Determinisme vs. stokastik

Det er allerede nævnt flere gange, at stokastiske faktorer vil have en betydelig indflydelse på den mikroskopiske situation. Reelt set burde vi derfor beskrive reaktionen for et køretøj m i trafiksituationen ved stokastisk variabel R_m givet ved

$$R_m = F_m(\text{stimuli}),$$

hvor F_m er en funktion af de stokastiske stimuli for køretøj m , d.v.s. den *stokastiske reaktion* er en funktion af de *stokastiske stimuli*. Ovenstående må selvfølgelig forventes at give den mest realistiske beskrivelse; men hvorfor vælges så en deterministisk tilgang?

Dette skyldes først og fremmest, at vi ønsker at behandle problemet med forholdsvis let-tilgængelige metoder. Den stokastiske situation vil meget hurtigt blive temmelig uoverskuelig, og den nødvendige matematik forholdsvis kompliceret. Desuden kan vi argumentere for, at *under visse forudsætninger* er det acceptabelt at se deterministisk på situationen. Vi vil antage, at de stokastiske stimuli *ikke* er direkte afhængige af de deterministiske stimuli, d.v.s. vi antager strengt deterministisk reaktion på generelle faktorer som f.eks. den relative fart, afstand o.s.v. til forankørende. I så fald kan vi skrive den stokastiske reaktion som

$$R_m = f_m(\text{stimuli}) + X,$$

hvor f_m er den reaktion på de deterministiske stimuli og X er en stokastisk variabel for de øvrige stimuli. Hvis vi befinder os i grænsetilfældet, hvor X er ignorabel i forhold til $f_m(\text{stimuli})$, d.v.s. en trafiksituation hvor den deterministiske reaktion er af markant større betydning³ end den stokastiske, kan vi tillade os at skrive

$$R_m \approx f_m(\text{stimuli}) = [\text{reaktion}]_{m,\text{deterministisk}}$$

Det er klart, at dette grænsetilfælde vil svare til tæt trafik med markant indbyrdes afhængighed, hvor der således hverken er incitament eller for den sags skyld mulighed for stokastisk reaktion, der kan have en reel indflydelse på situationens udvikling. D.v.s. i dette tilfælde er det rimeligt kun at anvende den deterministiske reaktion — og derfor er determinisme berettiget i vores problem med moderat/tæt trafik.

2.3 En vurdering af modeldannelsen

Vi har nu givet vores bud på, hvordan en model for trafik kan udformes i forventningen om at opnå en “anvendelig beskrivelse” af fænomenet. Det er imidlertid allerede nu klart, at dette oprindelige mål måtte indskrænkes betydeligt. Dette giver samtidig modellen en anden karakter, som vi allerede nu kan uddybe og vurdere før den videre matematiske teori og praktiske vurdering. Allerede i opstillingen af de forskellige abstraktionsniveauer optrådte den vurdering, at trafik selv på et relativt simpelt niveau er et i mange henseender temmelig uhånbareligt fortolkningsspørgsmål præget af både fysisk-tekniske og kulturelle elementer. En trafikmodel vil derfor aldrig kunne passes ind i en endegyldig, entydigt bestemt ramme uanset anstrengelserne i modeldannelsen.

Ifølge [Skov90, p. 123], kan en systemudvikling baseres på

1. *entydigt fastlagt teori, ud fra hvilken man dels kan få udpeget de væsentlige elementer i modelobjektet samt hovedkoblingerne mellem disse elementer, og dels kan få et bud på graden af den simplifikation der er foretaget;*
2. *eller også på en teoretisk indsigt udvalgt mellem forskellig konkurrerende teorier angående modellens objektområde;*
3. *eller ikke på nogen teori, hvorfor systemafgrænsningen bliver et udtryk for en første konceptuel fortolkning af modelobjektet.*

Trods den manglende teoretiske baggrund for trafikmodelleringsproblemet, vil det dog næppe være passende at kalde vores model for en generel tolkning af fænomenet trafik. Ved valget af

³Det er vanskeligt at tale om sammenlignelighed mellem disse størrelser — en “mindre” stokastisk reaktion kan sagtens få afgørende betydning for en trafiksituation.

det teoretiske abstraktionsniveau alene, er denne snarere et udtryk for vores egen grundlæggende tolkning af en generaliseret empirisk viden om trafik, som vi forventer at kunne formalisere i en kobling mellem egne vurderinger og fysisk teori. Specifikt kan vi betragte den fundne model som et forsøg på formalisering af den *fysisk-deterministiske baggrund, der danner grundlag for selve den opgave at føre et køretøj under vekselvirkning med andre køretøjer.*

Denne systemafgrænsning sætter i sig selv begrænsninger på det oprindelige objekt, generel trafik i praksis. Dette måtte reduceres til en mere specifik, semipraktisk situation, idet vi ønskede at bevare aspekter af det oprindelige objekt.

Dette skal ikke opfattes som et desperat forsøg på at passe en model ind i en forkert sammenhæng, men derimod som et forsøg på at fastholde det oprindelige mål i vores simple tolkning. Dette kan vise sig frugtbart i den forstand, at den fysisk-deterministiske tolkning af trafikens opførsel selv i den semipraktiske situation i visse henseender vil fremstå entydig og ydermere baserer sig på et velkendt teoretisk grundlag. Den simple model vil derfor udmærke sig som grundlag for videre modeludvikling og raffinering i en udvidet systemafgrænsning, der rækker ud over de semipraktiske situationer.

Af samme grund vil det også være optimistisk at forvente, at modellen kan få nogen egentlig deskriptiv betydning i praktiske situationer. Den skal snarere opfattes som en formalisering af dele af det grundlag, der kan danne basis for en videre modeludvikling. I de følgende kapitler vil vi indføre den relevante matematiske abstraktion, der kan danne grundlag for en mere håndgribelig modelanvendelse, analyse og vurdering, og slutteligt sammenholde disse med dette afsnit.

KAPITEL 3

Trafikplanlægning og modelanvendelse

Hvem anvender modeller for trafik? På det teoretiske plan finder vi fysikeren og matematikeren, der har en faglig interesse i at opnå en tilfredsstillende beskrivelse af, *hvorfor* specifikke fænomener opstår i en bestemt trafiksituation. På det praktiske plan finder vi trafikplanlæggeren, for hvem de teoretiske modeller bliver et nyttigt værktøj i planlægningsarbejdet, hvor det også er vigtigt at kunne udtale sig om, *hvornår* fænomenerne forekommer? Det er derfor indlysende, at der er en grundlæggende forskel mellem disse anvendelsesplaner, det teoretiske og det praktiske.

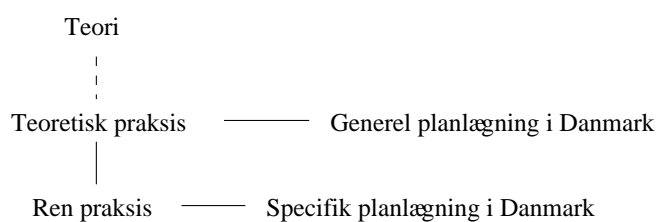
I det følgende vil vi med udgangspunkt i en analyse af den sammenhæng, trafikplanlæggerens arbejde indgår her i Danmark, forsøge at belyse spørgsmålene, hvornår, hvordan og hvorfor særligt mikroskopiske modeller anvendes i praksis. Hvilke andre modeltyper bruges foruden disse, og hvad er gevinsten herved? Hvordan foregår planlægning af større projekter i praksis; dette undersøges ud fra et konkret eksempel, den planlagte tredje Limfjordsforbindelse.

Analysen er dels baseret på et interview med en trafikplanlægger tilknyttet Institut for Samfundsudvikling og Planlægning på Aalborg Universitet, Anker Lohmann-Hansen, dels [Wohl67, kapitel 1-2], en ældre bog om de generelle teoretiske aspekter af planlægningsprocessen. Gennem vores arbejde med problemet viste de to kildetyper sig så afgørende forskellige, at vi har fundet det relevant med et kort afsnit om *kontekstuel metode*.

3.1 Kontekstuel metode

Som nævnt er dette kapitel baseret på to forskellige kildetyper, litteratur og interview med en trafikplanlægger. Sidstnævnte blev relevant, idet vi fandt det nødvendigt for en fyldestgørende besvarelse af spørgsmålene: Hvornår og hvordan anvendes trafikmodeller i Danmark idag? I

praksis formulerede vi en række kortfattede, vejledende spørgsmål, som vi mente, var dækkende for vores grundlæggende spørgsmål: *Hvad, hvornår, hvordan og hvorfor?* Disse udgjorde så den røde tråd for interviewet, der blev optaget på bånd og dernæst diskuteret og vurderet i forhold til de oplysninger, vi havde fundet i litteraturen. Desuden gjorde Anker Lohmann-Hansen kort rede for den specifikke planlægningsproces i forbindelse med den tredje Limfjordsforbindelse. Det viste sig i forløbet, at teori og praksis er to vidt forskellige størrelser i planlægning. Vi fandt det relevant at skelne mellem tre planlægningsniveauer — teori, teoretisk praksis og ren praksis (jf. Figur 3.1). Teoretisk praksis skal opfattes som det teoretiske grundlag for trafikplanlægning netop her i landet — ren praksis er anvendelse af denne teoretiske praksis med de implikationer, der nu måtte forekomme. Sammenhængen mellem disse niveauer vil blive diskuteret nærmere i de følgende afsnit.



Figur 3.1: De forskellige niveauer i planlægning

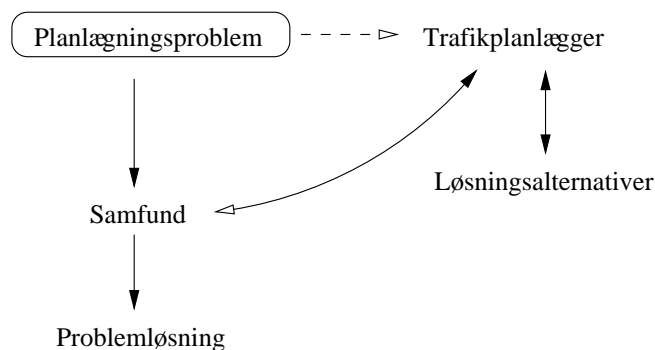
3.2 Trafi kplanlægning og samfundet

Hvad er trafikplanlægning? Overordnet vil vi betragte det som *en metode til teknisk forbedring af en infrastruktur med hensyntagen til alle de mange grupper, der på en eller anden måde har interesse i, at netop denne del af infrastrukturen fungerer optimalt*. I det følgende vil vi *kun* overveje den del af infrastrukturen, der har relevans for netop vores projekt — vejnetværket. Det er værd at bemærke, at denne opfattelse gør trafikplanlægning til et både teknisk-objektivt og samfundsmæssigt-subjektivt begreb i den forstand, at de tekniske løsninger altid skal udformes på baggrund af en vægtning af interessegruppernes krav og ønsker. Infrastrukturen vedrører os alle, og den videnskabelige proces skal derfor altid tilpasses samfundets krav.

Altså, den styrende faktor i planlægningsprocessen er *samfundet*. Underordnet dette finder vi den professionelle planlægger, trafikplanlæggeren, der med kendskab til de videnskabelige planlægningsmetoder dels fungerer som samfundets kilde til objektiv information og rådgivning om effektiv planlægning, dels som den person, der i praksis skal implementere en bestemt planlægningsløsning. I trafikplanlæggerens arbejdsproces vil der således findes to overordnede aspekter, det tekniske og det samfundsrelaterede. På det tekniske plan er man interesseret i vi-

denskabelige metoder til at give en objektiv fremstilling af løsningsalternativer til et problem ved konkret at opstille en relevant model, der enten kan give indblik i direkte problemstillinger, eller mere specifikt tilbyde sammenligninger mellem mere skjulte, numeriske størrelser i alternativet (tæthed m.m.). Løsningsmetoderne kan være både konkrete og abstrakte; der kan være tale om fysiske ændringer af en vejstrækning — eller der kan være tale om forslag til politiske indgreb for at mindske eller ændre trafikmængden på en strækning. Trafikplanlæggerens fremstilling skal da danne grundlag for en vurdering, der kan række ud over det rent videnskabelige — en sådan vurdering kan være både objektiv og subjektiv. Hensyn til fremkommelighed er en logisk, objektiv vurdering, mens vurdering af knap så konkrete aspekter som f.eks. ulykkesrate (og alvorligheden af ulykker) typisk vil underkastes en mere irrationel vurdering. Sikkerhed prioriteres jo uforholdsmæssigt højt i forhold til andre aspekter, men dette bundes i den subjektive, ikke-videnskabelige vurdering. Nødvendigheden af sådanne ikke-videnskabelige vurderinger kan naturligvis påpeges af trafikplanlæggeren, men den videre vurdering er samfundets, altså de politiske organers, opgave. Dog er det vigtigt for planlæggeren at være tilstrækkelig objektiv i en evt. rådgivningsopgave for derved at sikre et solidt videnskabeligt fundament for den politiske beslutning.

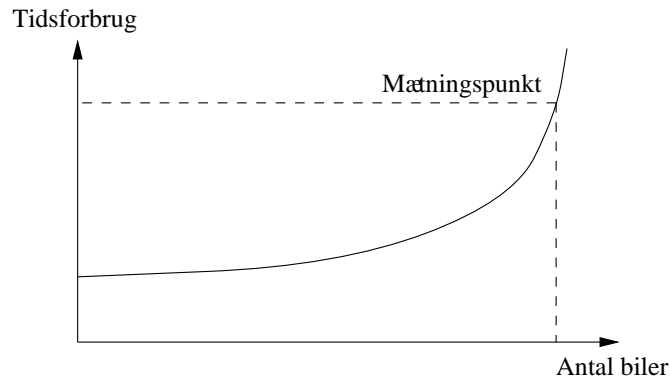
Omvendt, hvis der f.eks. har været nogle få, meget alvorlige trafikuheld på en vejstrækning, kan utrygheden i opinionen medføre et konkret problem, der dernæst må arbejdes ind i en videnskabelig sammenhæng af trafikplanlæggeren. Infrastrukturelle problemer kan således opstå ad flere forskellige veje. Se iøvrigt Figur 3.2.



Figur 3.2: Løsning af planlægningsproblemer. Trafikplanlæggeren optræder som redskab, han anvendes af samfundet.

Ifølge Anker Lohmann-Hansen er det afgørende at forstå, at i trafikplanlægning er teknik og samfundsrelationer to uadskillelige størrelser. Som eksempel nævnte han tidsbesparelse på en vejstrækning. Denne parameter har to sider; dels er der tale om en numerisk størrelse, der kan indgå konkret i videnskabelige vurderinger og mere direkte beregninger på vejstrækningen.

Men en tidsbesparelse er også relateret til samfundet i den forstand, at den repræsenterer en økonomisk gevinst; jo mere effektivt, vores vejnet er, jo billigere produktion. På samme måde er en tidsbesparelse ækvivalent med mindre kødannelse, der igen vil medføre mindre forurening og mindre støj. Grafen i Figur 3.3 viser sammenhængen mellem trafiktheden og det gennemsnitlige tidsforbrug. Jo større tæthed, jo større tidsforbrug, d.v.s. tab for samfundet.



Figur 3.3: Sammenhæng mellem tidsforbrug og antal køretøjer

Man har et konkret planlægningsproblem, hvis tidsforbruget er så stort, at strækningens mætningspunkt er nået, d.v.s. fremkommeligheden er markant nedsat i forhold til det minimale tidsforbrug uden kødannelse. I grove træk består trafikplanlæggerens opgave da i at ændre på kurven, så mætningspunktet er uden for rækkevidde. Dette kan gøres eksplicit ved at udjævne kurven, altså ændre vejstrækningens kapacitet. En mere implicit metode vil være at nedsætte antallet af køretøjer, f.eks. gennem afgifter, omdirigering af køretøjer m.m., der nedsætter anvendelsen af strækningen. Begge metoder er relevante, og de viser tydeligt, at løsningen til optimeringsproblemet ikke er et rent videnskabeligt anliggende.

3.3 Trafi kplanlæggere i Danmark

Vi konstaterede i Afsnit 3.2, at trafikplanlæggerens metode er og bør være videnskabelig for at sikre den objektive del af et politisk beslutningsgrundlag. Men i hvilke tilfælde er konkret modelanvendelse, både matematisk og empirisk, relevant her i landet? For at besvare dette spørgsmål er det nærliggende først at overveje, *hvor* trafikplanlæggere egentlig befinder sig i samfundet.

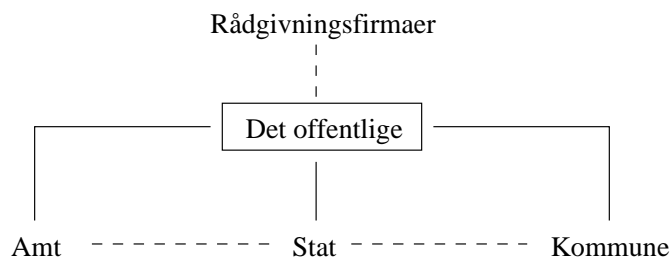
Her i landet kan man skelne mellem en række forholdsvis afgrænsede områder, indenfor hvilke trafikplanlæggeren arbejder med vejplanlægning m.m. Det politiske område er naturligvis mest relevant, eftersom langt størstedelen af det danske vejnetværk er offentligt ejet. Den

struktur, der danner ramme om vejplanlægning, er et direkte produkt af den decentrale struktur, der karakteriserer opbygningen af vort samfund. I politisk, direkte samfundsrelateret sammenhæng vil man skelne mellem trafikplanlæggere i hhv. stat, amt og kommune — og indenfor disse planer er arbejdsopgaverne nøje fordelt. Ifølge Anker Lohmann-Hansen kendetegnes planlæggerens opgave indenfor de enkelte niveauer som følger, jf. desuden Figur 3.4:

Stat På statsligt niveau findes planlæggeren i styrelser under trafikministeriet. Bl.a. kan nævnes vejdirektoratet, færdselsstyrelsen o.s.v., organer, der varetager en løbende infrastrukturevaluering og politisk rådgivning. På dette niveau er modelanvendelsen indlejret i organisationen.

Amt Trafikplanlægning på amtskommunalt niveau afspejler nøje amtets opgaver, idet en planlægger bl.a. beskæftiger sig med trafikcampagner og kollektiv trafik. Rådgivning og prognoser for vejnetværk er kun en del af arbejdsopgaven, men modelanvendelse er også her relevant — de fleste amtskommuner har deres egen trafikplan.

Kommune På kommunalt niveau vil der være tale om byplanlægning, etablering af nye kommuneveje på et overvejende kvalitativt niveau. Modelanvendelsen finder kun i ringe udstrækning sted i mindre kommuner, hvor den er begrænset til simple praktiske analyser, biltælling o.l.; der vil sjældent være basis for yderligere teoretisk arbejde.



Figur 3.4: Skitse af den hovedsageligt politisk kontrollerede struktur, planlæggeren indgår i.

På alle de politiske niveauer anvendes trafikplanlæggere hyppigt i form af konsulentbistand fra private firmaer. Særligt på amtskommunalt og kommunalt niveau er dette en oplagt løsning p.g.a. de store omkostninger, der ville være forbundet med at have et fast hold af planlæggere. Blandt de største danske firmaer, der udbyder denne type rådgivende bistand, er Carl Bro, CowiConsult og Rambøll. Derudover kan man finde trafikplanlæggere indenfor de indtil videre relativt få dele af infrastrukturen (specifikt vejnettet), der ikke er direkte statsejede (men hvor staten f.eks. har aktiemajoriteten); bl.a. Storebæltsbroen samt Øresundsforbindelsen. Slutteligt arbejder en mindre gruppe af planlæggere på forskningsinstitutioner.

Afsluttende nævnte Anker Lohmann-Hansen, at trafikplanlægning her i landet først i løbet af de seneste ti år er blevet “relevant på ny”. Energikrisen i 1980’erne medførte et drastisk fald i trafikmængden, og den efterfølgende normalisering ledte planlæggere og rådgivere til den fejlagtige slutning, at trafikmængden nu var stabil. Dette førte til, at mange projekter blev arkiveret, og trafikplanlægning var så godt som ikke eksisterende frem til starten af 90’erne. Her vendte udviklingen, og i dag er trafikplanlægning mere relevant end nogensinde. Mængden af trafik er steget gennem de sidste ti år, og trafikplanlæggeren når knap nok at få løst et problem inden, det næste dukker op. Alvorlige kødannelser forekommer dagligt på motorveje og indfaldsveje omkring København og i de større byer. En effektiv infrastruktur — eller en begrænsning af motorfærdslen — er derfor afgørende.

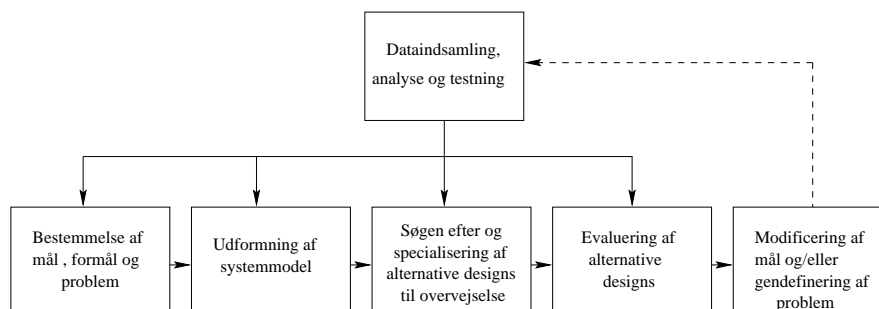
3.3.1 Planlægningsmodeller — udformning og metode

I forbindelse med trafikplanlægning er det vanskeligt at udpege en særlig modeltype, der kan anvendes generelt. Modelanvendelse, hvis den overhovedet finder sted, afhænger i høj grad af problemets karakter og de bagvedliggende samfundsmæssige krav til en løsning. En model kan være eksakt, den kan være overvejende empirisk, rent empirisk — eller der kan være tale om gæt og forsøg på at objektivisere subjektive vurderinger i en konkret, formel opstilling (cost-benefit modeller). Selvom det matematiske aspekt kun er en del af modellen, er metoden til modeldannelsen ifølge Anker Lohmann-Hansen den samme, som vi har anvendt i Kapitel 2. Modelbegrebet er en systemafgrænsning, en forenkling af virkeligheden, der er af så objektiv karakter, at der på en eller anden måde kan tales om objektiv, videnskabelig sammenlignelighed med givne alternativer. Planlæggeren er imidlertid ikke så nøjeregnende hvad angår en bestemt modeltypes nøjagtighed — Anker Lohmann-Hansen påpegede, at en model skulle give en “rimelig beskrivelse af virkeligheden” og samtidig være “håndterbar i praksis”.

Disse krav gør komplicerede matematiske modeller relativt uinteressante i de fleste situationer. Det er muligt at opstille tilfredsstillende empirisk baserede formeludtryk for f.eks. kapacitet, fremkommelighed m.m. på en vejstrækning. Den empiriske dimension og de mere kvalitative overvejelser er ifølge Anker Lohmann-Hansen afgørende, i det mindste i Danmark. Empiriske modeller er typisk fuldt ud tilstrækkelige, for beregningers fuldstændige nøjagtighed er sjældent afgørende; man kan under alle omstændigheder kun foretage fysiske gradueringer af vejudformning/størrelse indenfor de fastlagte rammer. I det følgende vil vi undersøge disse metoder nærmere og udpege de kvalitativ-empiriske og matematiske overvejelser, der vil indgå i modelopstillingen for ethvert større vejplanlægningsprojekt.

Et planlægningsproblem opstår typisk af en række af større eller mindre problemer, der giver anledning til undersøgelse af løsningsmuligheder. Umiddelbart er det da planlæggerens opgave at foretage en konkret, tilbundsående problemidentificering og -analyse samt undersøge, hvil-

ken effekt en mulig ændring ville have på disse problemer. Hvilke variable skal medregnes, og hvilke overvejelser skal indgå for at få det bedste resultat for det konkrete problem? På basis af en sådan kvalitativ undersøgelse, kan planlæggeren opstille en simpel model til at undersøge alternativernes indflydelse på de relevante variable. I større situationer vil det typisk være nærliggende at undersøge numeriske størrelser nærmere, hvorfor modellen kan underbygges af et datamateriale for det nærværende problem (idag registreres sådanne typisk v.h.a. EDB, en udvikling, der har gjort denne del af planlægningsopgaven betydeligt lettere sammenlignet med tidligere).



Figur 3.5: Illustration af fremgangsmåde for typisk konstruktion af en model (inspireret af [Wohl67, p. 8]).

Et studie af disse data vil give et estimat af trafiksituationen hidtil, og på baggrund heraf er det planlæggerens opgave at udforme et løsningsforslag, der bedst optimerer trafiksituation nu samt den forventede fremtidige trafiksituation. En sådan undersøgelse af trafiksituationen vil typisk basere sig på let sammenlignelige numeriske størrelser, der er statistisk effektive, således at en rimelig vurdering af den fremtidige situation kan gives og anvendes. Trafikplanlæggeren er derfor nødt til at foretage en *problematisering*

Komposition: Hvilken slags trafik er i bevægelse og dets karakteristika — hvordan er fordelingen mellem de to generelle klasser af køretøjer, transport af mennesker eller transport af gods?

Volumen: Hvor meget trafik er i bevægelse?

Udgangspunkt og mål: Hvor bevæger trafikken sig til og fra?

Kvalitet: Hvordan bevæger trafikken med henblik på komfort, bevægelseshastighed?

Udgifter: Hvor dyr er trafikbevægelsen? Vil brugeren drage nytte af evt. ændringer?

For at sikre den tidligere nævnte objektive, videnskabelige vurdering i planlægningsprocessen, er det afgørende, at evalueringen af alternativer og design af løsninger generelt foregår under en

for det pågældende samfund ensartet metode og kriterier. Et fast sæt af betingelser og kriterier sikrer desuden en vis homogenitet, i den generelle infrastruktur, og det højner effektiviteten. Dette stiller krav til samarbejdet mellem de politiske niveauer, der er involveret i planlægningen — d.v.s. en effektiv styring og koordinering af planlægningsmål i de decentrale politiske organer er afgørende for planlæggeren.

Hvornår har man så fundet den optimale løsning? Dette afhænger af de forhold, under hvilke løsningsforslagene bliver evalueret. Oftest vil løsningsforslagene indsnævres ud fra de kvalitative krav til løsningen, hvorefter man med kun et enkelt forslag tilbage kan undersøge forskellige dybere løsningsmuligheder i dette forslag m.h.t. nærmere udformning o.s.v. Typisk vil en økonomisk analyse vægte tungt i sådanne overvejelser. I tilknytning bl.a. hertil er det også vigtigt i denne sidste del af planlægningsprocessen at genoverveje relevansen af projektet. Hvorfor er udførelsen nødvendig? Hvorfor skal løsningen være netop sådan? Kan udførelsen evt. vente?

Anvendelse af mikroskopiske modeller

Vi vil nu kort uddybe på anvendelsen af mikroskopiske modeller i Danmark — modeller af den mere rene, teoretiske type, som vi fandt frem til i modeldannelsen, Kapitel 2.

Ifølge Anker Lohmann-Hansen har anvendelsen af eksakte modeller faktisk aldrig været voldsomt relevant i Danmark — man har hovedsageligt knyttet overvejelserne op på praktiske, kvalitative overvejelser og empirisk baserede modeller.

De mere abstrakte modelmetoder (bl.a. mikromodellerne, som vi har overvejet) opstod oprindeligt forholdsvis tidligt i USA, men anvendelsen af disse er først blevet relevant i Danmark i løbet af de sidste 30 år. Først i 1970'erne var biltætheden så høj her i landet, som den var i USA allerede i starten af 1920'erne. På det sidste, med de nye muligheder for simulering og EDB-beregninger, er større og mere komplicerede modeller blevet relevante. Specifikt mikromodeller har været relativt uinteressante indtil for nyligt — men de bruges fortrinsvis til fremkommelighedsanalyser på motorvejsstrækninger og komplicerede planlægningsproblemer som f.eks. optimering af grøntider i koblinger af mange lyskryds. Det er dog afgørende at pointere, at sådanne problemer næppe er hverdagsarbejde for en dansk trafikplanlægger.

3.4 Et eksempel — den tredje Limfjordsforbindelse

I dette afsnit eksemplificeres planlægningsprocessen i Danmark og modelanvendelsen med udgangspunkt i problematikken angående den planlagte tredje Limfjordsforbindelse. Ifølge Anker Lohmann-Hansen er Limfjordstunnelen et af de mest befærdede områder udenfor hovedstadsområdet; og med den fortsat stigende mængde trafik er spørgsmålet om en udvidelse af den nuværende løsning med hhv. Limfjordsbroen og Limfjordstunnelen højaktuelt. For tiden stiger

trafikken 2,5% årligt i tunnelen og 1,5% på broen. Modelberegninger siger, at den samlede trafik over Limfjorden i 2015 vil nærme sig 120.000 køretøjer per døgn, hvilket er ca. 35.000 køretøjer mere end i dag (kilde: [InfStruk00]). Dette er problematisk, idet de nuværende forbindelser over Limfjorden kun har en begrænset kapacitetsreserve. En forøgelse af trafikken over broen vil desuden heller ikke være ønskværdig i den forstand, at dette ville forøge trafikmængden samt miljø- og støjgener i Aalborg midtby, der i forvejen er belastet hvad dette angår. Altså, det konkrete problem er opstået i en praktisk sammenhæng, hvor modelmetoder dernæst har indikeret, at problemet blot var i sin tidlige fase. D.v.s. på kommunalt niveau havde man her et planlægningsproblem, der skulle løses mest hensigtsmæssigt. Oprindeligt søgte man en politisk regulering, idet Aalborg Kommune ved en revision af handlingsplanen for trafik og miljø undersøgte muligheden for at påvirke udviklingen af trafikken over Limfjorden ved en konsekvent styring af trafikudviklingen i byen og en bedre tilrettelæggelse af den kollektive trafik. Deres konklusion var, at dette kun ville have en mindre indflydelse på trafikken over fjorden. På baggrund af dette og udviklingen i den regionale trafiksituation, har der længe været diskussioner om muligheden for en ny Limfjordsforbindelse til at klare den øgede trafik og aflaste de eksisterende forbindelser; altså en konkret, fysisk udvidelse som løsningsmulighed. Der har været præsenteret adskillige løsningsforslag, med vidt forskellige argumentation, men tilbage i Kommuneplanen står for øjeblikket to alternativer.

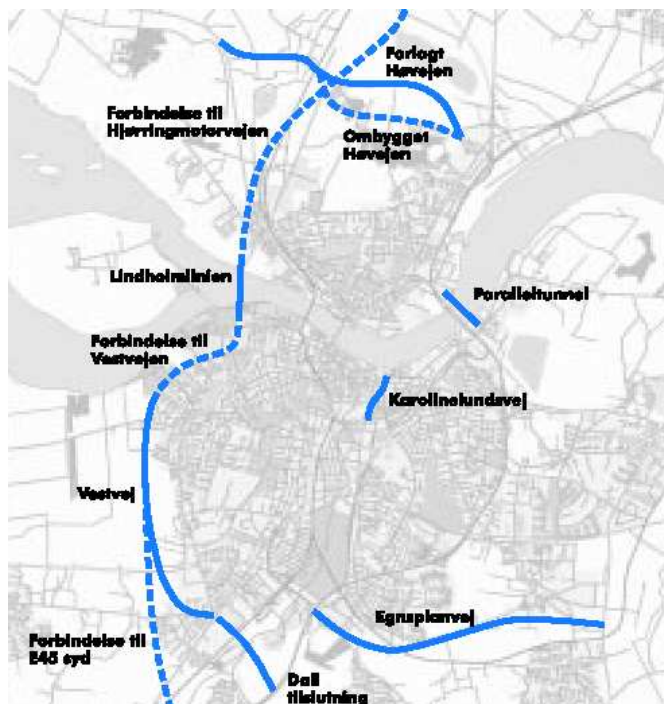
1. En vestlig tunnelforbindelse ved Lindholm.
2. En udbygning af den eksisterende tunnel med en østlig palleltunnel.

For en nærmere beskrivelse af disse to alternativer jf. [InfStruk00] — se desuden Figur 3.6.

3.4.1 Lindholmlinien

Lindholmløsningen forudsætter, at vestvejen er etableret. Vestvejen er den planlagte vej, som skal fungere som omfartsvej vest om Aalborg. Ved Lindholm-alternativet spiller vestvejen en central rolle, idet denne i givet fald skal fungere som forbindelse til denne nye fjordkrydsning. Selve fjordkrydsningen er placeret tæt på byen for at trække så meget trafik væk fra broen, og dermed midtbyen, som mulig; dette gør den til en interessant løsning i det lokalpolitiske perspektiv, hvor der arbejdes hårdt for at nedsætte trafikken i midtbyen.

Lindholmlinien har tilsvarende markante negative konsekvenser for trafik- og miljøsituationen i Vestbyen. I dette område ligger arealreservationer, som har til formål at holde stedet fri for bebyggelse, med henblik på den fremtidige anlæggelse af den planlagte Vestvej. Disse områder fremstår i dag som grønne arealer i Vestbyen og det ville uden tvivl udløse protester, hvis linien og dermed Vestvejen bygges. Desuden består Vestbyen hovedsageligt af villakvarterer, og Lindholmlinien ville utvivlsomt medføre et markant fald i ejendomsværdien, foruden de adskillige



Figur 3.6: Illustration, der bl.a. viser Lindholmlinien og paralleltunnelen (kilde: [InfStruk00]).

mere skjulte gener, en så central vej ville give. Den forventede stigende mængde trafik ville kun forværre disse umiddelbare konsekvenser, samtidig med at strækningen vil optræde som en større og større barriere i mellem Vestbyen og det øvrige Aalborg.

Alternativet med paralleltunnelen bygger på en udvidelse af den eksisterende Limfjordstunnel med to nye tunnelrør placeret øst for de eksisterende. Reelt er dette en udvidelse fra seks spor til ti, hvoraf de to skal fungere som nødspor. Tunnelen har den afgørende positive effekt, modsat Limfjordsbroen, at store mængder trafik ledes udenom Aalborg midtby. Placeringen af tunnelen er dog en ulempe, eftersom forbindelsen ikke er nær så attraktiv som broen for lokaltrafikken fra Nørresundby og det vestlige Aalborg. En paralleltunnel vil derfor næppe hjælpe til at aflaste Limfjordsbroen yderligere men kun til at styrke selve tunnelforbindelsen og håndtere den voksende trafikmængde i denne. Hvis man betragter Figur 3.6, ses det tydeligt, at for de bilister som befinder sig inde i midtbyen og nu bruger broen, vil det være for langt og besværligt at benytte tunneloverfarten. Bliver Lindholmlinien derimod etableret, vil det tidsmæssigt kunne svare sig for bilister i Aalborg midtby, som skal over fjorden, at benytte denne nye overfart. Dog, en yderligere fordel ved etablering af nye tunnelrør ville være, at dette kunne sikre en generelt mere stabil afvikling af tunneltrafikken. Limfjordstunnelen er idag meget følsom over-

for reparationer, trafikuheld o.s.v., og afviklingsproblemer forekommer ofte. Ved en udbygning med 4 spor, deraf 2 nødspor, vil man kraftigt reducere følsomheden og dermed effektiviteten.

For at sikre at alle umiddelbare aspekter af dette meget store planlægningsproblem varetages så hensigtsmæssigt som muligt, har Aalborg Kommune i de foreløbige undersøgelser lagt stor vægt på et kvalificeret og gennearbejdet beslutningsgrundlag. Infrastrukturudvalget har derfor bl.a. foretaget en analyse, der viser at langturstrafikken er 5% større end hidtil antaget, og kortturstrafikken er tilsvarende 5% mindre. Disse nye tal giver ikke anledning til en forandret vurdering af en paralleltunnel, men de betyder, at en Lindholmlinie vil komme til at bære en større mængden trafik end først antaget, da bilister på længere ture vil foretrække at køre uden om Aalborg midtby. Dette er endnu et argument for at vælge denne løsning, og samtidig et vigtigt eksempel på, hvordan modelleringsmetoder også i praksis er uundværlige i udsortering og overvejelsen af løsningsalternativer.

3.4.2 Udsortering af løsningsforslag — økonomi

En fremtidig tredje Limfjordsforbindelse er allerede en realitet — spørgsmålet er blot *hvordan*? Der kan opstilles argumenter både for og imod de to tilbageværende løsninger, men det største problem i løsningsvalget er af økonomisk karakter. Alle de politiske niveauer i Danmark har pligt til at sørge for både vedligeholdelse af egne veje og fremkommelighed på disse. Ved udbygning af tunnelen står det klart, at staten her skal betale.

Men såfremt beslutningen falder på Vestvejen og Lindholmlinien står det uklart, hvem der skal betale de 2,2 mia, som prisen er vurderet til (kilde: [InfStruk00]). Anker Lohmann-Hansen pointerede, at det vil være umuligt for Aalborg Kommunen at betale, eftersom det kommunale budget på ingen måde kan håndtere så voldsom en udgift. I amtets 2001-budget er afsat knap 17 mio (kilde: Nordjyllands Amt) til vejanlæg, og en investering på flere milliarder i et enkelt udbygningsprojekt er usandsynlig. Reelt set er der derfor kun staten, der har midlerne til realisering af linien. På dette politiske niveau er det afgørende spørgsmål imidlertid, hvorvidt en Lindholmsforbindelse kan garantere, at der ikke vil blive behov for en senere udbygning af Limfjordstunnelen. Det vil næppe være tilfældet med den stadigt voksende trafikmængde og det samtidige vedligeholdelsesarbejde, der altid er ved tunnelen. Derfor er staten også tilbageholdende med at placere den store investering i en ny forbindelse.

3.4.3 Vurdering af den praktiske problemstilling

Eksemplet med den tredje Limfjordsforbindelse illustrerer gennemgående mange af de forhold og begreber, vi har været inde på i undersøgelsen af planlæggerens arbejde og arbejdsrammer. Den viser tydeligt den omfattende teori og analyse, der ligger i udarbejdning af alternativer til

større projekter; men specielt betydningen af de mange mere u håndgribelige faktorer i planlægningen står frem. Hvilke interessegrupper skal der tages mest hensyn til — de indbyggere, der bor udenfor Aalborg og kan nyde godt af en ny forbindelse udenom Aalborg? Eller boligejerne i Vestbyen, der hverken ønsker støjgener eller faldende ejendomspriser? Der kan opstilles et væld af sådanne faktorer, der er uhyre vanskelige og politisk farlige at værdisætte og anvende i beregninger, men et forsøg herpå kan ofte give et vigtigt indblik. Trafikplanlægning er en balancegang, hvor de videnskabelige faktorer for samfundet er relativt uinteressante. Det er de små ting, der griber ind i vores hverdag, der er af afgørende betydning. Den endelige værdisætning af disse størrelser er derfor også i sidste ende et politisk anliggende, og det er næppe heller overraskende, at den tredje Limfjordsforbindelse indtil videre er strandet på forhandlingsniveau.

Der er direkte politiske komplikationer, økonomiske komplikationer og interessekonflikter, der kan trække projektet i langdrag. Dette viser tydeligt, at den glatte, praktisk teoretiske beskrivelse af planlægning i Danmark ikke eksisterer i realiteten. I den praktisk teoretiske beskrivelse beskrev vi samspillet mellem politiske organer og trafikplanlæggeren — men den afgørende faktor i planlægningsprocessen er reelt set den politiske beslutningsproces, der i virkeligheden ligger ud over planlæggerens arbejdsområde.

Med hensyn til modelanvendelsen, står det umiddelbart klart, at de empirisk-teoretiske analyser i et projekt af denne størrelse er langt mere værdifulde end rene teoretiske overvejelser. Problemet indgår i en stor og meget kompleks sammenhæng, hvor empiri og konkrete målinger altid vil være mest oplagt (og mest brugbar). På baggrund af dette er det så relevant at overveje, om teoretiske modeller overhovedet kan anvendes i praksis? Hvor bruger man den modeltype, vi har set på i Kapitel 2? Følgende afsnit er et eksempel på en anvendelse, der imidlertid ligger langt fra den praktiske anvendelse, man kunne have forestillet sig.

3.5 Et eksempel — automatiseret kørsel

Konklusionen på Kapitel 2 pegede på, at den model vi havde opstillet ikke var en tilfredsstillende beskrivelse af trafik på mikroskopisk plan, p.g.a. den stærke forbindelse til afgrænsningsområdet og den semipraktiske ramme. Vi vurderede, at dens rolle i modeldannelsesprocessen snarere burde opfattes som en formalisering af eget afgrænsningsområde, en formalisering, der varentydig nok til at kunne overføres på udvidede afgrænsningsområder. Ved udvidelsen af modellen kunne man forvente det muligt at konstruere mere anvendelige modeller, i Kapitel 2 påpegede vi ligeledes, at trafik generelt er ekstremt fortolkningsafhængige og derfor vanskelige at modellere generelt i en teoretisk ramme. Imidlertid gjorde vi rede for, at vi ubevidst havde formået at opstille en teoretisk fortolkning af den rent fysiske opgave, der ligger i at føre et køretøj i en simplificeret generel situation.

Dette fører direkte over på en anvendelse i planlægning, der ligger lige så langt fra den mere praktiske anvendelse, man kunne have forestillet sig. Selvom den teoretiske fortolkning næppe kan betragtes som tilstrækkelig i trafiksituationer med mennesker involveret, giver den et interessant perspektiv for mulige fremtidige situationer, hvor køretøjerne er computerstyrede. I dette tilfælde kan vi til en vis grad selv diktere trafikens opførsel ud fra de algoritmer, computersystemerne udfører kørselsopgaven med. Dette ville være et oplagt sted at anvende mikroskopiske (teoretiske) modeller til styring af acceleration, altså “longitudinel” styring. Konkret kunne man forestille sig, at køretøjet v.h.a. radar/laser kunne bestemme afstand og relativ hastighed i forhold til forankørende og anvende en variant af den model, vi opstillede i Kapitel 2, til tilsvarende justering af acceleration.

I [Rothery, afsnit 4.5] nævnes at visionen om denne såkaldte automatiserede kørsel blev fremlagt allerede i 1930'erne af General Motors. Udviklingen har stået på lige siden, både teoretisk og i praksis. Automatiseret kørsel er et interessant perspektiv for anvendelsen af mikroskopiske/teoretiske modeller til udformingen af den fremtidige infrastruktur; ikke som en teoretisk beskrivelse af trafik, men som kontrolligninger i et computersystem. Hvis automatiseringen blev gennemført på motorvejsstrækningen, ville kapaciteten blive mangedoblet, idet reaktionstiden mindskes markant med mindre minimal sikkerhedsafstand til følge. Den mindre reaktionstid vil desuden betyde højere hastigheder og derfor generelt en alvorlig effektivitetsforøgelse uden egentlig vejudvidelse. Implementering af systemet i dette omfang, ville naturligvis være en særdeles omfattende og kostbar opgave — men meget er vundet i den anden ende, idet f.eks. udvidelse af vejnet vil blive mindre relevant, samtidig med at mange andre faktorer kunne forbedres. Eksempelvis er det rimeligt at forvente en betydelig mindre forurening, hvis miljørigtig/økonomisk kørsel kunne implementeres som en del af styreprocessen.

KAPITEL 4

Introduktion til differentiaalligninger

I det følgende kapitel vil vi give modellen fra Kapitel 2 et mere formelt grundlag for derudfra at tage stilling til dens brugbarhed udfra en praktisk vinkel.

Vi så i Kapitel 2, hvordan vi kan opstille en teoretisk sammenhæng mellem de kinematiske funktioner for to på hinanden følgende køretøjer i en trafiksituation med n køretøjer. Vi udledte indtil flere mulige sammenhænge, men på et temmeligt uformelt grundlag; for hvad er egentlig den præcise sammenhæng mellem de kinematiske funktioner?

Vi kan indføre *gennemsnitsfarten* v_{smit} som ændringen i sted i tidsrummet $t_1 \leq t \leq t_2$, d.v.s.

$$v_{smit} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Hvis vi overvejer grænsetilfældet $t_2 - t_1 \rightarrow 0$, såfremt dette eksisterer, får vi øjeblikfsarten $v(t)$, der naturligvis er lig den første afledede for stedfunktionen, $x'(t) = v(t)$. På samme måde kan vi indføre accelerationsfunktionen som øjeblikksændringen i fartfunktionen. D.v.s. vi har relationerne

$$\begin{aligned}x'(t) &= v(t) \\x''(t) &= v'(t) = a(t).\end{aligned}$$

Dette giver de opstillede ligninger et noget andet, mere solidt matematisk præg — vi får nemlig en række forskellige typer *differentiaalligninger*. I denne rapport forudsættes det ganske vist, at læseren kender til disse på et grundlæggende niveau, men da vi allerede har set eksempler på specielle, mere komplicerede differentiaalligningstyper i relation til trafikproblemet, vil vi bruge næste afsnit på at introducere *generelle differentiaalligninger*.

Hvad vil det f.eks. sige, at en funktion er løsning til en differentiaalligning? Og hvordan kan vi sikre os, at ligningen rent faktisk har en løsning for det generelle tilfælde? Som vi skal se, er dette langt fra trivielle spørgsmål. De følgende afsnit er primært baseret på [AndBöi92].

4.1 Indførelse af differentiaalligninger

Som ovenfor nævnt, har vi i relation til trafikproblemet set, at det er muligt at opstille en teoretisk sammenhæng mellem de kinematiske funktioner for afhængige køretøjer. For et givet køretøj m er disse funktioner alle relateret til stedfunktionen $x_m(t)$ i den forstand, at de er dennes hhv. første og anden afledede m.h.t. t . Ved at se på de lokale sammenhænge mellem køretøjerne og visse begyndelsesbetingelser, forventer vi at kunne udtale os om, hvorledes køretøjerne vil bevæge sig i forhold til hinanden som funktion af tiden $t \geq 0$.

En sådan problemstilling er faktisk bare en enkelt instans af det generelle differentiaalligningsproblem, der helt uformelt er en regulær ligning med de kvalitative forskelle

1. Den ukendte, x , er en funktion af en enkelt variabel (d.v.s. *ikke* selv en variabel).
2. I ligningen er givet en sammenhæng mellem én eller flere af funktionens, x 's, afledede.

Helt generelt kaldes denne type ligninger, hvori der indgår afledede op til orden n for, *ordinære n . ordens differentiaalligninger*. Såfremt der er tale om afledede for funktioner af flere variable, er der tale om *partielle differentiaalligninger*. Disse anvendes ikke i denne rapport, men kan, jf. bl.a. [Wohl67, afsnit 11.5], anvendes i en makroskopisk beskrivelse af trafik.

Vi vil i det følgende, for at sikre overskueligheden, bruge ordinære n . ordens differential-ligninger som udgangspunkt for den mest generelle type af differentiaalligninger, *differentiaalligningssystemer*.

4.1.1 Den generelle differentiaalligning af n . orden

Umiddelbart vil vi indføre en særlig mængde af funktioner, som af rent praktiske årsager er hensigtsmæssig i vores videre arbejde. Følgende defineres:

Definition 4.1 (n gange differentiable funktioner)

Mængden $C^n(I)$ defineres som mængden af funktioner, der er n gange differentiable, og hvis n . afledede er kontinuert på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, d.v.s.

$$C^n(I) = \{f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ er } n \text{ gange differentiable på } I, f^{(n)} \text{ kontinuert på } I\}.$$

Til ovenstående bemærkes, at tilsvarende mængder af differentiable funktioner kan defineres for mere generelle afbildninger (vektorfunktioner, jf. Afsnit 4.1.2).

En *ordinær differentiaalligning* af orden n defineres nu som følger.

Definition 4.2 (Ordinær differentiaalligning)

Lad funktionen $x(t) \in C^n(S)$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}$.

Sammenhængen

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (4.1)$$

hvor F er en kendt funktion defineret på et område $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, kaldes en *ordinær differentiaalligning* af orden n .

Hvis differentiaalligningen er opstillet på formen

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

siges den at være på *normalform*.

Bemærk, at det i de fleste tilfælde vil være muligt at opstille en differentiaalligning på normalform, i det mindste lokalt.

EKSEMPEL 1

Lad os overveje sammenhængen $x'' + 3x' = 4x + 3t$ — dette er et simpelt eksempel på en differentiaalligning. Vi kan opstille den på formen $F(t, x, x', x'') = x'' + 3x' - 4x - 3t = 0$, hvor F er defineret på hele \mathbb{R}^4 (hvis det antages, at $t \in \mathbb{R}$). Ligningen kan ydermere omskrives til normalform, $x'' = 4x - 3x' + 3t$.

Motiveret af det faktum, at vi rent faktisk arbejder med ligninger, vil det nu være relevant at overveje, hvad der egentlig skal til, for at en givet funktion g defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ er en løsning til differentiaalligningen. Det er intuitivt klart, at differentiaalligningen naturligvis skal give et sandt udsagn for alle $t \in I$, når g substitueres ind i differentiaalligningen. Imidlertid er denne lidt løse definition ikke helt tilstrækkelig.

Definition 4.3 (Løsning)

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval. En funktion $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ siges at være løsning til differentialligningen $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$, hvis og kun hvis

1. Funktionen ψ er n gange differentiabel på I , således at $\psi^{(n)}(t) = f(t, \psi(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t))$ for alle $t \in I$.
2. Funktionen f er defineret på $\{(t, \psi^{(i)}(t)) \mid t \in I, i = 0, 1, \dots, n-1\}$.

EKSEMPEL 2

Vi ser på følgende andenordens differentialligning

$$x'' = 4x - 3x'.$$

Funktionen $\psi(t) = 2e^t$ ses at være en løsning på hele \mathbb{R} , da

1. Funktionen ψ er to gange differentiabel på \mathbb{R} og $\frac{d^2}{dt^2}(2e^t) = 4 \cdot 2e^t - 3 \cdot \frac{d}{dt}(2e^t) = 2e^t$.
2. Funktionen $f(t, \psi, \psi') = f(t, 2e^t, \frac{d}{dt}(2e^t)) = 2e^t$ er defineret på hele \mathbb{R} .

Det bemærkes, at det i definitionen forlanges, at I er et åbent interval. Dette er en konsekvens af det faktum, at afledede er defineret som grænseværdier fra *både* højre og venstre, d.v.s. punkt 2) i Definition 4.3 vil ikke give mening for endepunkter i lukkede intervaller.

Det er nu klart, helt basalt, hvad der overhovedet menes med en ordinær differentialligning samt løsninger til denne. Imidlertid viser definitionerne sig utilstrækkelige i det mere generelle tilfælde — det er allerede blevet antydnet i Afsnit 2.1, at vi under bestemte omstændigheder vil få en mere omfattende afhængighed for køretøjer i en trafiksituation; afhængighed som et *system*. Sådan forholder det sig generelt i mange konkrete modelleringssituationer, og vi vil derfor indføre *systemer af differentialligninger* under strengere antagelser, som såkaldte *begyndelsesværdiproblemer*. Det skal iøvrigt vise sig, at differentialligningssystemer, hvori der kun indgår ligninger af første orden, faktisk er den mest generelle type af differentialligning overhovedet, idet ethvert system af n . ordens ligninger kan omskrives til denne.

Før vi overvejer dette vigtige faktum nærmere, er det dog nødvendigt at opstille nogle enkelte relevante definitioner m.m. for generelle afbildninger af typen $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (hvor $I \subseteq \mathbb{R}$), d.v.s. *vektorfunktioner*.

4.1.2 Vektorfunktioner

En vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$ er som bekendt en funktion, $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ idet $I \subseteq \mathbb{R}$, d.v.s. en funktion vi kan opskrive som følgende n -dimensionale vektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

For at skelne mellem regulære funktioner og vektorfunktioner, vil vi de fleste steder anvende notationen $\mathbf{x}(t)$ for en vektorfunktion \mathbf{x} med den uafhængige variabel t ; eller blot \mathbf{x} .

Det ses, at funktionstypen faktisk blot er en generalisering af det mere begrænsede funktionsbegreb, vi hidtil har anvendt. Vi vil også overføre en del af vores definitioner direkte, bl.a. differentiability — dog defineres først *kontinuitet* for afbildninger.

Definition 4.4 (Kontinuitet af afbildninger)

Lad $\alpha : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en afbildning. α siges at være *kontinuert* i $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^m$, hvis der for alle $\epsilon > 0$ eksisterer et $\delta(\epsilon, \mathbf{t}_0)$, således at

$$|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(\mathbf{t}) - \alpha(\mathbf{t}_0)| < \epsilon.$$

Udfra ovenstående definition kan det vises, at en vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$ er kontinuert, hvis og kun hvis alle komponenter $x_k(t)$ er kontinuerte. Vi får brug for denne kontinuitet i næste afsnit.

Tilsvarende vil vi definere *differentiability for en vektorfunktion* komponentvis. Vi ved, for regulære funktioner af én variabel, at den afledede er defineret som grænseværdien

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

såfremt denne eksisterer. Følgende defineres da for vektorfunktioner

Definition 4.5 (Differentiabilitet af vektorfunktion)

Vektorfunktionen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

siges at være differentiabel på intervallet I , hvis $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ alle er differentiable på I .

Den afledede skrives da

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}.$$

4.1.3 Systemer af differentiallyigninger — omskrivning

Det er muligt at overføre de tidligere definitioner fra enkelte ligninger stort set direkte på differentiallyigningssystemer, blot funktionerne udskiftes med vektorfunktioner. D.v.s., idet \mathbf{x} er vektorfunktionen $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, og f en kendt funktion, er et differentiallyigningssystem på normalform en sammenhæng

$$\mathbf{x}^{(n)} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}).$$

Tilsvarende kan løsninger beskrives på samme måde som for n . ordens differentiallyigninger — dette udelades dog indtil videre, da det i relation til eksistens og entydighed af løsninger viser sig nyttigt at anvende et strengere ligningsbegreb (og dermed også strengere løsningsbegreb).

Umiddelbart vil vi dog, som tidligere lovet, se nærmere på, hvorfor lige netop førsteordens differentiallyigningssystemer, d.v.s. systemer af typen $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$, er så generel en type. Resultatet er vigtigt, for det danner grundlag for vores videre overvejelser om eksistens og entydighed — overvejelser, der anvendes utallige steder rapporten igennem.

Det er imidlertid ikke vanskeligt at se, hvordan en differentiallyigning af orden n kan omskrives. Vi antager, at ligningen kan opstilles på normalform, d.v.s. vi har

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (4.2)$$

Sæt da $x = z_1$, $x' = z_2$, $x'' = z_3, \dots, x^{(n-1)} = z_n$, hvorved det følgende førsteordenssystem fremkommer

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(t, x, z_1, z_2, \dots, z_n), \end{cases} \quad (4.3)$$

svarende til vektor-differentialligningen $\mathbf{z}' = f(t, \mathbf{z})$. Løsningerne til (4.2) og (4.3) ses at være ækvivalente, idet det gælder, at hvis $\psi(t)$ er en løsning til (4.2), så er $(\psi(t), \psi'(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t))$ en løsning til (4.3). Omvendt gælder naturligvis, at hvis $(\psi(t), \psi'(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t))$ er en løsning til (4.3), så er $\psi(t)$ en løsning til (4.2).

EKSEMPEL 3

Overvej differentialligningen $x''' = 4tx'' + 7x' - x$. Sæt $z_1 = x$, $z_2 = x'$ og $z_3 = x''$; så har vi førsteordenssystemet

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ z_3' &= 4tz_3 + 7z_2 - z_1. \end{aligned}$$

Denne substitutionsmetode kan naturligvis også anvendes på differentialligningssystemer af arbitrær orden på helt samme måde — her substituerer vi blot vektorfunktioner ind i stedet. Altså, *ethvert system af differentialligninger af arbitrær orden på normalform kan omskrives til et førsteordenssystem på normalform.*

4.1.4 Eksistens og entydighed

Vi vil nu indføre *begyndelsesværdiproblemet* som en instans af det generelle differentialligningssystem. De noget strengere betingelser, der ligger heri, vil under yderligere antagelser garantere eksistensen af netop én løsning til problemet.

Definition 4.6 (Begyndelsesværdiproblem)

Lad en vektorfunktion være givet ved $f : T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Givet et punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in T$, defineres et *begyndelsesværdiproblem* som ligningssystemet

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Definition 4.7 (Løsning til begyndelsesværdiproblem)

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval, således at $t_0 \in I$. En funktion $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ siges at være en løsning til begyndelsesværdiproblemet, hvis og kun hvis

1. $\psi(t_0) = \mathbf{x}_0$,
2. $(t, \psi(t)) \in T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \forall t \in I$,
3. $\psi(t)$ er differentiabel og $\psi'(t) = f(t, \mathbf{x}), \forall t \in I$.

Det er allerede nu ikke nogen overraskelse, at ovenstående er en nødvendig betingelse for entydighed. Vi kender problemet fra ordinære differentiaalligninger af første orden. Givet f.eks. den meget simple differentiaalligning $x' = f(t)$, ved vi, at den fuldstændige løsning $x(t) = \int f(t) dt$, altså en *mængde* af funktioner. For at bestemme en entydig løsning (en bestemt stamfunktion), er det nødvendigt at kende et punkt på løsningskurven, altså et sæt begyndelsesværdier. Tilsvarende kan gøres i det generelle tilfælde, blot er det langt vanskeligere. Vi præsenterer her sætningen i den helt generelle form

Sætning 4.1 (Eksistens og entydighed)

Givet begyndelsesværdiproblemet i Definition 4.6, lad $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ være området

$$R = \{ (t, \mathbf{x}) \mid |t - t_0| \leq a, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b \}, \quad a, b > 0.$$

Antag, at $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ er kontinuert på R , og lad

$$M = \max_{(t, \mathbf{x}) \in R} |f|, \quad r = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Så har begyndelsesværdiproblemet en entydig løsning på intervallet $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Med de forhåndenværende metoder, er det ikke umiddelbart muligt at bevise ovenstående — det kan ligefrem være vanskeligt at forstå betydningen af de enkelte forudsætninger. Det er imidlertid mindre vigtigt, blot bør man vide, at sætningen eksisterer. Beviset benytter sig indgående af begreber fra den videregående analyse, og for detaljer henvises til [AndBöi92, kapitel 1].

4.1.5 Linearitetsbegrebet

Indtil videre har vores afgørende sætninger og definitioner beskæftiget sig med differentiaalligningssystemer helt generelt. Dette er tilstrækkeligt på det kvalitativt teoretiske niveau — men

skal man arbejde helt konkret med ligningsproblemer, viser det sig meget nyttigt at skelne mellem to hovedklasser af differentialligninger; lineære og ikke-lineære. Vi kender problemet fra lineær algebra, hvor teorien for lineære ligningssystemer umiddelbart kan gives et meget omfattende, kvantitativt grundlag — mens samme er så godt som umuligt for generelle ikke-lineære ligningssystemer.

Motiveret af dette, vil vi indføre differentialoperatoren L

Definition 4.8 (Differentialoperator)

Lad funktionen $(x, t) \in C^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. En differentialoperator af n . orden er en funktion L , således at

$$L(x, t) = f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) \in C^0.$$

D.v.s. differentialoperatoren er en funktion på klassen af n gange differentiable funktioner, der afbilder over i klassen af kontinuerte funktioner. V.h.a. denne kan vi skrive det generelle differentialligningsproblem som $L(x, t) = 0$.

Definition 4.9 (Linearitet for L)

En differentialoperator L siges at være *lineær*, hvis den er en lineær transformation, d.v.s.

$$L(cx) = cL(x) \quad \text{og} \quad L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2), \quad c \in \mathbb{R}.$$

V.h.a. operatorer kan lineære differentialligninger/differentialligningssystemer nu defineres.

Definition 4.10 (Lineære differentialligninger)

En differentialligning $f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ siges at være lineær, hvis den kan skrives på operatorformen

$$L(x, t) = g(t),$$

hvor L er en lineær differentialoperator af orden n .

Såfremt $g(t) = 0$ kaldes ligningen homogen, ellers inhomogen; hvis $L(x, t)$ er uafhængig af t , d.v.s. $L(x) = g(t)$, siges ligningen at have konstante koefficienter.

Tilsvarende siges et system af differentialligninger at være lineært, hvis samtlige indgående ligninger er lineære.

Helt konkret svarer lineære differentialligninger blot til almindelige lineære ligninger. D.v.s. idet vi husker på, at den ukendte er en funktion, forlanges det, at alle de indgående afledede optræder lineært. D.v.s. differentialligningen $x'' + \sin(x') - t^4 x = e^t$ er *ikke* lineær, da $\sin(x')$ ikke er et lineært udtryk i x' . Omvendt er ligningen $4x'' + x' - x = t^2$ et eksempel på en lineær, inhomogen andenordensligning med konstante koefficienter.

4.2 En formel baggrund for trafi kmodellerne

Vi har i Afsnit 2.2.1 indført de relevante mikroskopiske modeller på “uformelt” niveau, altså hvor de kinematiske funktioner, $x(t)$, $v(t)$ og $a(t)$ blev anvendt direkte. Vi vil nu forsøge at karakterisere sammenhængene mere formelt v.h.a. differentialligninger.

Som beskrevet i starten af dette kapitel, er de kinematiske funktioner relateret i den forstand, at $x'(t) = v(t)$ og $x''(t) = a(t)$. D.v.s. vi kan opskrive det generelle, simplificerede problem, (2.3) som følgende differentialligning, idet vi skriver de afledede hhv. $x'' = \ddot{x}$ og $x' = \dot{x}$ for at sikre overskuelig notation

$$\ddot{x}_n(t) = \lambda(\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)), \quad n = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Skrives ovenstående ud, fås et *lineært andenordens differentialligningssystem*, idet $\dot{x}_0(t) = v_0(t)$ antages kendt

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{x}_1(t) &= \lambda(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) \\ 2) \quad \ddot{x}_2(t) &= \lambda(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)), \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ n) \quad \ddot{x}_n(t) &= \lambda(\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)) \end{aligned} \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (4.5)$$

Bemærk, at der er linearitet, fordi alle de indgående funktioner optræder lineært. I ovenstående er $a(t)$ en kendt accelerationsfunktion for det forreste køretøj i situationen.

Denne situation har den umiddelbare fordel, at problemet er nemt at gå til. Det er muligt at løse ligningssystemet rekursivt, d.v.s. først løse 1) m.h.t. $\dot{x}_1(t)$, substituere denne ind i 2), løse denne o.s.v. Den analytiske løsning er matematisk set ikke vanskelig, idet ligningerne er simple, men beregningsteknisk ville dette være meget omfattende for flere køretøjer. Det vil således være nærliggende at anvende numeriske metoder. Ad den vej kan man alene nøjes med at foretage en mere kvantitativt betonet undersøgelse af, hvorledes lineære, inhomogene andenordens differentialligninger (med konstante koefficienter) løses, d.v.s. i første omgang undgå yderligere teori for differentialligningssystemer. Denne teoretiske undersøgelse vil vi foretage helt fra bunden i næste kapitel og afsluttende illustrere med et par større praktiske eksempler.

Den generelle situation, svarende til (6.11), som vi opstillede i Kapitel 2, vil være betydeligt vanskeligere at behandle. Hvis reaktionen for et køretøj f.eks. skal være afhængig af afstanden

til forankørende fås differentialligningen (der naturligvis som ovenstående kan opskrives som et system)

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{\kappa}{x_{n-1}(t) - x_n(t)} (\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)). \quad (4.6)$$

Dette system er *ikke* lineært, hvilket gør det relativt meget vanskeligere at undersøge med traditionelle metoder (i det mindste på kvantitativt niveau). Dette er beklageligt, for vi vil senere argumentere for, at ovenstående må forventes at give en umiddelbart mere korrekt beskrivelse af trafik, end det er muligt at opnå med den lineære model, jf. Afsnit 5.4.2.

Slutteligt kan man i begge tilfælde omskrive til den mere realistiske *forsinkede differentilligning*, hvor der tages højde for en vis (konstant) reaktionstid $T \geq 0$ for hver enkelt bilist. I Afsnit 6.3 vil vi se nærmere på, hvordan man kan karakterisere *stabilitet* i lukkede lineære systemer med reaktionstid. D.v.s. vi ser på f.eks. en lukket cirkulær vej med $n + 1$ køretøjer og får systemet

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t+T) &= \lambda(\dot{x}_n(t) - \dot{x}_0(t)) \\ \ddot{x}_1(t+T) &= \lambda(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \ddot{x}_n(t+T) &= \lambda(\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)) \end{aligned}, \quad \lambda > 0, \quad t, T \geq 0. \quad (4.7)$$

Altså, udtrykt i ord, det sidste køretøj er “fører køretøj for fører køretøjet”. Ovenstående er kvalitativt forskelligt fra (4.5), idet koblingen mellem ligningerne er betydeligt mere kompliceret. Det skal imidlertid vise sig, at lineær algebra giver en række nyttige metoder; mere herom i Kapitel 6. Iøvrigt indgår også de to parametre, λ og T , der viser sig at have afgørende betydning for visse kvalitative egenskaber for løsningerne til differentialligningssystemet. Hvis f.eks. $\lambda = 0$ har vi for køretøjerne den trivielle situation, hvor alle bevæger sig med konstant fart.

KAPITEL 5

Andenordens lineære differentialligninger

Vi vil nu som omtalt i afsnit 4.2 overveje problemet i (4.4) — som beskrevet kan vi løse dette system ved en rekursiv metode, hvor n andenordensligninger skal løses. Det er derfor tilstrækkeligt i første omgang at se på det simple problem, hvor $n = 1$, altså

$$\ddot{x}_1(t) = \lambda(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)), \quad (5.1)$$

hvor $\dot{x}_1(t)$ er en kendt funktion.

Vi ønsker at kunne bestemme stedfunktionen for køretøj 2; dette kræver en nærmere undersøgelse af, hvordan man rent faktisk løser en ligning af ovenstående type. I det følgende vil vi se nærmere på problemet, først ud fra homogene lineære andenordens differentialligninger, senere de inhomogene. De fundne løsningsmetoder vil slutteligt blive anvendt på et større praktisk eksempel, hvor også relevansen af vores modeller overvejes for situationen med kun to køretøjer. Resten af kapitlet er baseret på [Nagle96] og [EdPen93].

5.1 Egenskaber for løsninger til den homogene ligning

Vi betragter den generelle andenordens lineære differentialligning, idet det antages, at denne kan skrives på normalform

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \quad (5.2)$$

hvor $p(t)$ og $q(t)$ er kontinuerte funktioner på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og x er en differentiabel funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Vi vil undersøge tilfældet $f(t) = 0$ for alle $t \in I$, altså den *homogene ligning*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0. \quad (5.3)$$

5.1.1 Superposition

Noget meget brugbart som gælder for homogene lineære ligninger er det faktum, at enhver lineær kombination af to løsninger også er en løsning.

Sætning 5.1 (Superposition)

Lad x_1 og x_2 være to forskellige, ikke trivielle, løsninger til en lineær homogen differentiaalligning

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad (5.4)$$

på et interval I . Da er den lineære kombination

$$x = c_1x_1 + c_2x_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

også en løsning på I .

BEVIS: På operatorform bliver (5.4) $L(x, t) = 0$. Det er klart, at ovenstående ligning er lineær i x'' , x' og x , d.v.s. hvis x_1 og x_2 er løsninger, har vi på operatorform

$$L(x_1 + x_2) = L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2) = 0 + 0 = 0,$$

d.v.s. en linearkombination af to forskellige løsninger er også en løsning til (5.4). ■

Bemærk, at dette superpositionsprincip er en direkte konsekvens af L 's linearitet — d.v.s. for ikke-lineære ligninger vil det ikke gælde. Af Sætning 4.1 har vi, at givet to begyndelsesværdier vil der være en unik løsning til andenordensligningen (5.2). Hvis vi ser på det generelle tilfælde

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad \text{hvor} \quad x(a) = b_0 \quad \text{og} \quad x'(a) = b_1.$$

Først finder vi to løsninger x_1 og x_2 , og bagefter vil vi benytte vores begyndelsesværdier sammen med linearkombinationen $y = c_1x_1 + c_2x_2$. Vi får da to ligninger, som vi skal løse for at finde konstanterne c_1 og c_2

$$c_1x_1(a) + c_2x_2(a) = b_0 \quad c_1x_1'(a) + c_2x_2'(a) = b_1. \quad (5.5)$$

Lad os illustrere med et eksempel.

EKSEMPEL 4

Til differentialligningen

$$x'' - 2x' + x = 0,$$

kan vi let verificere, ved differentation, at $x_1 = e^t$ og $x_2 = te^t$ er løsninger. Lad endvidere begyndelsesværdier $x(0) = 5$ og $x'(0) = -2$ være givet. Herudfra vil vi finde en løsning

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x' &= c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t = (c_1 + c_2) e^t + c_2 t e^t \\ x(0) &= c_1 = 5 \\ x'(0) &= c_1 + c_2 = -2. \end{aligned}$$

Dette giver os at $c_1 = 5$ og $c_2 = -7$, hvorved $x(t) = 5e^t - 7te^t$.

5.1.2 Linær (u)afhængighed

For at ovenstående procedure kan gennemføres må funktionerne x_1 og x_2 have den egenskab, at ligningerne i (5.5) altid kan blive løst for c_1 og c_2 uanset hvilke begyndelsesværdier, vi måtte have. Den følgende definition fortæller os, hvor forskellige de to funktioner x_1 og x_2 skal være.

Definition 5.1 (Lineær afhængighed af to funktioner)

Lad x_1 og x_2 være to funktioner. x_1 og x_2 siges at være lineært afhængige, hvis der eksisterer en sammenhæng

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}.$$

EKSEMPEL 5

Funktionerne $f(t) = \sin(2t)$ og $g(t) = \sin(t)\cos(t)$ er lineært afhængige da $f(t) = 2g(t)$ for alle t .

5.1.3 Wronski-determinanten

Fremgangsmåden i eksemplet er ikke særlig god til at vise afhængighed mellem funktioner. Da der er tale om ligningssystemer, kan vi imidlertid indføre et nyttigt praktisk værktøj, den såkaldte *Wronskideterminant* for to funktioner.

Definition 5.2 (Wronskideterminanten for funktioner)

Lad f og g være to differentiable funktioner. *Wronskideterminanten* for f og g , $W(f, g)$, defineres da som

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$$

Sætning 5.2 (Wronskideterminanten og lineær (u)afhængighed)

Lad funktionerne x_1 og x_2 være løsninger til den homogene andenordens lineære differential-ligning

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

på et åbent interval $I \subset \mathbb{R}$, hvor $p(t)$ og $q(t)$ er kontinuerte. Da gælder at

(a) Hvis x_1 og x_2 er lineært afhængige, da er $W \equiv 0$, for alle $t \in I$.

(b) Hvis x_1 og x_2 er lineært uafhængige, da er $W \neq 0$, for alle $t \in I$.

BEVIS: (a) - Hvis funktionerne x_1 og x_2 er lineært afhængige med $x_1(t) = kx_2(t)$ er Wronskideterminanten

$$\mathbf{W}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} kx_2 & x_2 \\ kx_2' & x_2' \end{vmatrix} = kx_2x_2' - kx_2'x_2 = 0.$$

(b) - Hvis vi antager, at der findes et punkt $a \in I$ således at $W(x_1(a), x_2(a)) = 0$, og så kan vise, at det betyder x_1 og x_2 er lineært afhængige, da vil vi have bevist (b). Betragt ligningerne

$$c_1x_1(a) + c_2x_2(a) = 0 \tag{5.6}$$

$$c_1x_1'(a) + c_2x_2'(a) = 0.$$

Idet $W(a) = 0$ har (5.6) en ikke-triviell løsning. Det betyder, at c_1 og c_2 ikke begge er nul. Med disse værdier definerer vi løsningen

$$\phi(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t). \tag{5.7}$$

Ligningen (5.6) giver os, at $\phi(t)$ tilfredsstiller begyndelsesværdierne $\phi(a) = \phi'(a) = 0$. Sætning 4.1 giver os, at $\phi \equiv 0$ på I . På baggrund af (5.7) og det faktum at c_1 og c_2 ikke begge er nul, giver Definitionen 5.1 om afhængighed, at x_1 og x_2 er lineært afhængige. ■

5.1.4 Generel Løsning

Vi kan nu endelig vise, at enhver løsning til en homogen andenordens lineær differentiaalligning er en lineær kombination af to givne lineært uafhængige løsninger.

Sætning 5.3 (Generel Løsning)

Lad x_1 og x_2 være to lineært uafhængige løsninger på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ til den homogene ligning

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad (5.8)$$

hvor funktionerne $p(t)$ og $q(t)$ er kontinuerte på det åbne interval I . Da kan enhver løsning til (5.8) udtrykkes på formen

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.9)$$

for alle $t \in I$.

Det betyder altså, at hvis vi har fundet to lineært uafhængige løsninger, x_1 og x_2 , til den homogene andenordens lineære differentiaalligning, da kan vi udtrykke alle løsninger til denne differentiaalligning ved en lineær kombination af x_1 og x_2 .

BEVIS: Lad $\phi(t)$ være en hvilken som helst løsning til (5.8) og vælg et punkt $a \in I$. Vi betragter da systemet

$$c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = \phi(t_0) \quad (5.10)$$

$$c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) = \phi'(t_0). \quad (5.11)$$

Vi kan da løse for konstanterne c_1 og c_2

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\phi(t_0)x_2'(t_0) - \phi'(t_0)x_2(t_0)}{x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_1'(t_0)x_2(t_0)} \\ c_2 &= \frac{\phi'(t_0)x_1(t_0) - \phi(t_0)x_1'(t_0)}{x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_1'(t_0)x_2(t_0)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ved c_1 har vi multipliceret (5.10) med $x_2'(t_0)$ og (5.11) med $x_2(t_0)$ og subtraherer disse med hinanden, og for c_2 gøres det på samme måde.

Idet vi har valgt at x_1 og x_2 er lineært uafhængige har vi

$$W(x_1(t_0), x_2(t_0)) = x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_1'(t_0)x_2(t_0) \neq 0,$$

hvilket sikrer at nævneren i (5.12) er forskellig fra nul, og dermed er c_1 og c_2 vel-definerede. Med disse værdier for c_1 og c_2 er funktionerne $c_1x_1 + c_2x_2$ og ϕ begge løsninger til (5.8), som tilfredsstiller de samme begyndelsesværdier. Af Sætning 4.1 har vi, pga. entydighed, at de må være den samme funktion. ■

5.2 Homogene ligninger med konstante koefficienter

I dette afsnit vil vi se på løsning af *andenordens homogene lineære differentiaalligninger med konstante koefficienter*. Dette er som bekendt blot, jf. afsnit 4.1.5, specialtilfældet af (5.3), hvor koefficientfunktionerne $p(t)$ og $q(t)$ er reelle konstanter. Netop denne ligningstype er yderst relevant i trafiksituationen, idet vi allerede nu ved, at vi for tilfældet med to køretøjer faktisk skal undersøge en andenordens differentiaalligning med konstante koefficienter, dog blot med et inhomogent led, se (5.1). D.v.s. vi har differentiaalligningen

$$ax'' + bx' + cx = 0, \quad (5.13)$$

hvor $a \neq 0$, b og c er reelle konstanter. Antag, at x_1 og x_2 er to uafhængige løsninger til (5.13), da er den fuldstændige løsning

$$x = c_1x_1 + c_2x_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.14)$$

Da ligningen $ax'' + bx' + cx = 0$ er en lineær kombination af dens nulteordens-, førsteordens- samt andenordensafledede, vil vi lede efter en løsning på formen $x = e^{rt}$, da e^{rt} 's afledede er konstanter ganget med e^{rt} ¹. Erstatte man $x(t) = e^{rt}$ ind i (5.13) fås

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \Leftrightarrow e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \Leftrightarrow e^{rt} = 0 \quad \vee \quad ar^2 + br + c = 0,$$

da $e^{rt} > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$ har $e^{rt} = 0$ ingen løsning, og tilbage er kun andengradsligningen

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (5.15)$$

Funktionen $x(t) = e^{rt}$ er altså løsning til $ax'' + bx' + cx = 0$, hvis og kun hvis r opfylder ligningen (5.15). Ligningen (5.15) bliver også kaldt for "hjælpeligningen" eller for *den karakteristiske ligning*.

Definition 5.3 (Den karakteristiske ligning)

Polynomiumsligningen $ar^2 + br + c = 0$ kaldes *den karakteristiske ligning* for differentiaalligningen $ax'' + bx' + cx = 0$, hvor $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Vi bestemmer da rødderne r_1 og r_2 i (5.15), idet den gængse formel for andengradsligninger anvendes.

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Det antages i første omgang, at diskriminanten $D = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ — dette sikrer forskellige, reelle rødder. Som vi skal se senere, giver det dog også mening at se på tilfældet $D \leq 0$.

¹Vi bruger ikke gættet ke^{rt} . Idet ligningen er lineær, da er den på operatorform $L(cx) = cL(x)$, og konstanten kan i første omgang udelades.

Sætning 5.4 (Fuldstændig løsning)

Lad $ar^2 + br + c = 0$ være den karakteristiske ligning for differentialligningen $ax'' + bx' + cx = 0$. Hvis r_1 og r_2 er to forskellige rødder, så er den fuldstændige løsning til differentialligningen givet ved

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ er arbitrære konstanter.

BEVIS: Hvis $r_1 \neq r_2$ ses det, at Wronskideterminanten $W(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}) = r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t} = e^{(r_1+r_2)t}(r_2 - r_1) \neq 0$ for alle t , d.v.s. af Sætning 5.2 følger det, at de to løsninger er lineært uafhængige. Da følger af Sætning 5.3, at den generelle løsning til differentialligningen er $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$. ■

EKSEMPEL 6

Differentialligningen $x'' + 2x' = 0$ har den karakteristiske ligning

$$r^2 + 2r = r(r + 2) = 0,$$

med reelle rødder $r_1 = 0$ og $r_2 = -2$. Da $e^{0 \cdot t} = 1$, fås den generelle løsning

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-2t}.$$

Som allerede nævnt: selvom Sætning 5.4 er begrænset til *forskellige, reelle rødder*, er det ikke vanskeligt at udvide til tilfældet, hvor $D = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$ (det kræver dog yderligere overvejelser, idet lineær uafhængighed mellem to løsninger på den fundne eksponentialform er her *ikke* umiddelbart sikret). Tilsvarende kan man overveje tilfældet $D < 0$; men dette kræver en udvidelse af de reelle tal, således at \sqrt{a} også er defineret for $a < 0$. Vi vil overveje det analoge tilfælde for lineære systemer i afsnit 6.2.2, men specielt i forbindelse med andenordensligninger henvises til [Nagle96, afsnit 4.6].

5.3 Inhomogene ligninger med konstante koefficienter

Følgende er baseret på [Vi vil nu betragte det mest generelle tilfælde af den lineære andenordens differentialligning med konstante koefficienter, den *inhomogene* ligning; denne kan skrives

$$x'' + bx' + cx = g(t), \tag{5.16}$$

hvor $b, c \in \mathbb{R}$ og $g(t)$ som tidligere nævnt er defineret på det åbne interval $I \subseteq \mathbb{R}$. På *operatorform* kan ligningen skrives

$$L(x) = g(t), \tag{5.17}$$

idet L betegner en andenordens lineær differentialoperator (jf. Definition 4.10). Denne form er den mere generelle form af den lineære andenordens differentiaalligning (med konst. koeff.), hvoraf den homogene ligning $L(x) = 0$ blot er specialtilfældet $g(t) = 0$ — her viste det sig særligt nemt at finde løsningerne. Dette kan vi næppe forvente for ovenstående, men det viser sig, at visse af de allerede velkendte metoder kan anvendes i en modificeret form.

5.3.1 Generel løsning

Fra Sætning 5.4 ved vi, at givet rødderne (forskellige, reelle) r_1 og r_2 i den karakteristiske ligning, at den fuldstændige løsning er givet ved

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi overvejer operatorformen for den inhomogene ligning, (5.17), vil det være rimeligt at forvente, at vi på en eller anden måde kan anvende løsningen til den homogene ligning i forbindelse med løsning af denne, hvis blot vi samtidig kan tage hensyn til det inhomogene led. Først dog en enkelt definition:

Definition 5.4 (Partikulær løsning)

En funktion $x_p(t)$, der ved indsættelse i den inhomogene ligning opfylder denne, kaldes en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

Sætning 5.5 (Fuldstændig løsning)

Den inhomogene andenordens differentiaalligning med konstante koefficienter

$$x'' + bx' + cx = f(t), \quad t \in I,$$

har den generelle løsning

$$x_I(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

hvor $x_h(t)$ er den fuldstændige løsning på intervallet I til den tilsvarende homogene ligning

$$x'' + bx' + cx = 0, \quad t \in I,$$

og $x_p(t)$ er en partikulær løsning til differentiaalligningen på I .

BEVIS: Lad L være en lineær differentialoperator givet ved $L(x) = f(t)$. Lad desuden $x(t)$ og $x_p(t)$ være partikulære løsninger til den inhomogene ligning.

Hvis vi sætter $u(t) = x(t) - x_p(t)$, har vi af L 's linearitet, at

$$L(u) = L(x(t) - x_p(t)) = L(x(t)) - L(x_p(t)) = f(t) - f(t) = 0.$$

Deraf ses det, at $u(t)$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning $L(x) = 0$. V.h.a. den generelle løsning til den homogene ligning får vi, at $u(t)$ kan skrives som en lineær kombination af de to løsninger $x_1(t)$ og $x_2(t)$.

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ \Downarrow \\ x(t) - x_p(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ \Uparrow \\ x(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t). \end{aligned}$$

Vi slutter så heraf, at den *generelle løsning til den inhomogene ligning* $L(x) = f(t)$, når de to rødder til den karakteristiske ligning for $L(x) = 0$ er de reelle tal, r_1 og r_2 , kan skrives på formen

$$x_I(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + x_p(t), \quad t \in I, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Her betegner $x_p(t)$ en vilkårlig partikulær løsning til den inhomogene ligning. ■

5.3.2 Partikulær løsning

Vi har nu fundet *formen* på den generelle løsning. Spørgsmålet er så: Hvordan finder man en partikulær løsning? Det viser sig imidlertid ikke vanskeligt, idet der blot skal være tale om en *arbitrær* partikulær løsning; det betyder, at vi kan tillade os at foretage "kvalificerede" gæt; vi vil nu overveje, hvordan dette gøres mest hensigtsmæssigt. Den mest direkte metode er at se på det inhomogene led i differentialligningen og derudfra "konstruere" en partikulær løsning. Disse retningslinier bygger på princippet om at foretage det klogeste gæt i forhold til differentialligningens inhomogene led. Herunder er en skitse af de lettest fremkommelige:

nr.	det inhomogene led	partikulær løsning
1	$q(t) = ae^{bt}$	$x(t) = Ae^{bt}$
2	$q(t) = a\cos(bt)$ el. $q(t) = a\sin(bt)$	$x(t) = A\cos(bt) + B\sin(bt)$
3	$q(t) = ae^{ct}\cos(bt)$ el. $q(t) = ae^{ct}\sin(bt)$	$x(t) = Ae^{ct}\cos(bt) +$ $Be^{ct}\sin(bt)$
4	$q(t) = \text{et } n.$ grads polynomium	$x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1}$ $+ \dots + a_1 t + a_0$

Disse er hver især nyttige for netop deres specialtilfælde, men vi vil her nøjes med at overveje det tilfælde, hvor det inhomogene led er et polynomium af grad n — dette vil være tilstrækkeligt til vores modelanvendelse, idet fartfunktionen $\dot{x}_0(t)$ i (5.1) typisk vil være et polynomium (svarende til konstant acceleration, lineært voksende o.s.v.). Hvis vi har den inhomogene andenordensligning $x'' + bx' + cx = n$. grads polynomium så ses, at hvis $x_p(t)$ skal opfylde ligningen, er der tre muligheder for hvilken orden polynomiet kan have

1. Hvis $b, c = 0 \Rightarrow x_p(t) = (n + 2)$. ordens polynomium.
2. Hvis $b \neq 0, c = 0 \Rightarrow x_p(t) = (n + 1)$. ordens polynomium.
3. Hvis $b, c \neq 0 \Rightarrow x_p(t) = n$. ordens polynomium.

Vi gætter da på en partikulær løsning på formen

$$x_p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0.$$

Bemærk, at dette umiddelbart giver mening, eftersom en lineær kombination af n . ordens afledede for et polynomium også selv vil være et polynomium (generelt af graden n). Her er a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 ukendte konstanter, der bestemmes ved at løse differentialligningen (5.17) ved indsættelse.

Hvis vi har komplicerede eller store inhomogene led, kan vi tit drage fordel af linearitetsprincippet for denne type differentialligninger. Der gælder følgende sætning

Sætning 5.6 (Superpositionprincippet - inhomogen ligning)

Lad $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_k}$ være k partikulære løsninger til den inhomogene andenordens differentialligning (hvor L er en andenordens lineær differentialoperator)

$$L(x) = f(t),$$

på et interval I tilhørende k forskellige funktioner f_1, f_2, \dots, f_k . Dvs. antag, at x_{p_i} er en partikulær løsning til differentialligningen

$$L(x_{p_i}) = f_i(t), \quad \text{hvor } i = 1, 2, \dots, k.$$

Heraf gælder, at

$$x_p = \sum_{i=1}^k x_{p_i}(t),$$

er en partikulær løsning til

$$L(x) = \sum_{i=1}^k f_i(t),$$

på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$.

BEVIS: Vi vil kun bevise tilfældet $k = 2$, men v.h.a. induktion kan beviset let generaliseres.

Lad $x_{p_1}(t)$ og $x_{p_2}(t)$ være partikulære løsninger til henholdsvis

$$L(x) = q_1(t) \quad \text{og} \quad L(x) = q_2(t).$$

Hvis vi lader $x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$, vil vi vise, at $x_p(t)$ er en partikulær løsning til $L(x) = q_1(t) + q_2(t)$. Resultatet følger af L 's linearitet.

$$L(x_p) = L\{x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)\} = L(x_{p_1}(t)) + L(x_{p_2}(t)) = q_1(t) + q_2(t).$$

Sætningen er hermed bevist. ■

5.4 Den simple model

Vi vil i dette afsnit overveje de matematiske egenskaber for tilfældet med n køretøjer på en lige vejstrækning uden reaktionstid og med konstant sensitivitetskoefficient. Vi vil i det følgende bruge betegnelsen biler for disse køretøjer. Idet fartfunktionen $\dot{x}_0(t)$ for førerbilen antages eksplisit givet, kan vi opstille differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= \lambda(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) \\ \ddot{x}_2(t) &= \lambda(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \ddot{x}_n(t) &= \lambda(\dot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t)) \end{aligned}, \quad \lambda > 0, \quad t \geq 0. \quad (5.18)$$

Bemærk, at der er tale om et særligt simpelt system, eftersom der kun er parvis kobling (mellem andenordens differentialligninger med konstante koefficienter). Dette betyder, at systemet kan løses rekursivt, d.v.s. ved først at løse den første ligning m.h.t. $x_1(t)$, derefter substituere $\dot{x}_1(t)$ ind i den næste ligning, o.s.v. Oprindeligt ville vi have foretaget en simpel undersøgelse af sammenhængen mellem sted- og fartfunktioner for tilfældet med to biler, hvor førerbilen havde konstant acceleration; og dernæst generalisere til flere biler ved anvendelse af matematikprogrammet Maple uden yderligere overvejelser. Imidlertid fandt vi under arbejdet med Maple frem til nogle afgørende egenskaber og mangler ved modellen — de følgende afsnit belyser dette.

5.4.1 Eksempel med Maple

Vi har valgt at undersøge et konkret eksempel med antal biler $n = 4$ v.h.a. Maple. Det antages, at førerbilens acceleration er nul i et givet tidsrum, altså $\ddot{x}_0(t) = 0$. Selvom denne problemstilling kan forekomme simpel, skal den senere hen vise sig at give vigtige oplysninger om modellens

egenskaber. For overskuelighedens skyld er den brugte Maple-kode medtaget i afsnittet.

Værdien for accelerationen af førerbilen samt en værdi for sensitivitetskoefficienten λ angives. Værdien for λ er en *tænkt* værdi, som anvendes uden yderligere argumentation. Hvorvidt den er realistisk, er *ikke* afgørende for eksemplet

```
> acceleration:=0;
lambda:=0.3;
```

De relevante differentialligninger opstilles ud fra (5.18)

```
> deq0:=diff(x0(t),t,t)=acceleration;
deq1:=diff(x1(t),t,t)=lambda*(diff(x0(t),t)-diff(x1(t),t));
deq2:=diff(x2(t),t,t)=lambda*(diff(x1(t),t)-diff(x2(t),t));
deq3:=diff(x3(t),t,t)=lambda*(diff(x2(t),t)-diff(x3(t),t));
```

Selve differentialligningssystemet og de indgående variable (funktioner) angives dernæst

```
> diffsystem:=deq0,deq1,deq2,deq3;
> variable:={x0(t),x1(t),x2(t),x3(t)};
```

Ved hjælp af Maple's `dsolve` funktion løses differentialligningssystemet med begyndelsesbetingelser, således at alle biler starter med en indbyrdes relativ afstand på 30 m (nulpunktet fastlægges, så bil 4 har udgangsposition $x = 0$) og en relativ fart, således at førerbilen bevæger sig med 25 m/s (svarende til 90 km/h), og de øvrige med farten 5 m/s:

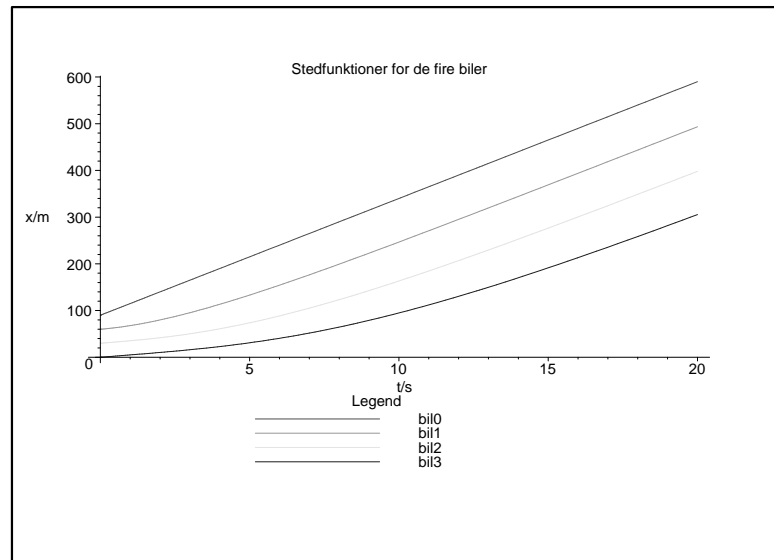
```
> sol:=dsolve({diffsystem,x0(0)=90, D(x0)(0)=25,x1(0)=60,
D(x1)(0)=5,x2(0)=30,D(x2)(0)=5,x3(0)=0, D(x3)(0)=5},
variable,type=numeric);
```

V.h.a. `odeplot` plottes da den numeriske løsning, jf Figur 5.4.1

```
> plots[odeplot](sol, [[t, x0(t)], [t, x1(t)],
[t, x2(t)], [t, x3(t)]], 0..20,
title="Stedfunktioner for de fire biler",
legend=["bil0", "bil1", "bil2", "bil3"], labels=["t/s", "x/m"]);
```

hvor den øverste graf er stedfunktion for bil 1, den næste for bil 2 o.s.v.

Af Figur 5.1 ser det ud til, at den asymptotiske udvikling for stedfunktionerne går mod en konstant afstand. Plottes de tilsvarende fartfunktioner, Figur 5.2, fremgår desuden, at den asymptotiske udvikling for farten for følgebilerne går mod farten for førerbilen, d.v.s. bilerne "følges



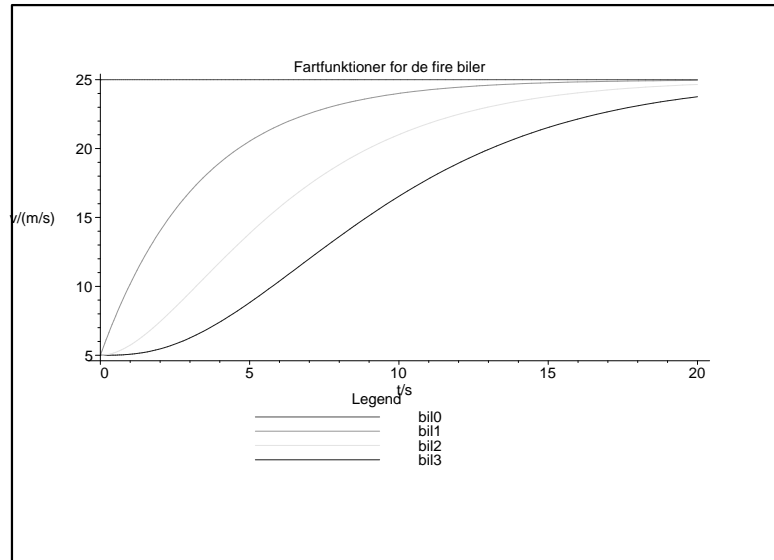
Figur 5.1: Plot af stedfunktioner

ad”, nøjagtigt som man måtte forvente det. Dette er ikke overraskende ud fra den mikroskopiske model, (5.18), hvor accelerationen ses at gå mod nul, når den relative fart går mod nul.

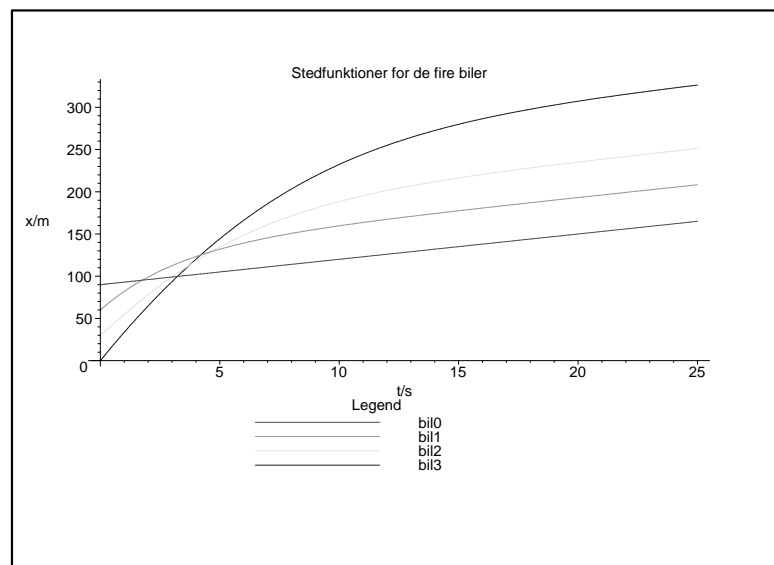
```
> plots[odeplot](sol, [[t, diff(x0(t),t)], [t, diff(x1(t),t)],
[t, diff(x2(t),t)], [t, diff(x3(t),t)]], 0..20,
title="Fartfunktioner for de fire biler",
legend=["bil0", "bil1", "bil2", "bil3"], labels=["t/s", "v/(m/s)"]);
```

Udviklingen af de forskellige kinematiske funktioner er i dette tilfælde ikke voldsomt interessante, idet vi har meget simple begyndelsesbetingelser. Men hvad hvis vi f.eks. foretog samme plot, men med forskellige værdier for de enkelte bilers begyndelsesfart? Vi lavede derpå et plot, hvor begyndelsesfarten var varierende ned gennem kolonnen, således at bil 3 havde farten 35 m/s, bil 2 25 m/s, bil 1 30 m/s og endelig bil 0 3 m/s. De relative afstande var de samme som før. Resultatet kan ses i Figur 5.3.

Det bemærkes, at graferne i løbet af de første fem sekunder krydser hinanden flere gange, før situationen stabiliserer sig med en asymptotisk udvikling med konstant relativ afstand. D.v.s. modellen gør det tilsyneladende muligt at overhale forankørende, men *samtidig* være afhængig af dennes bevægelse, således at situationen atter stabiliserer sig med en rigtig fordeling af den relative fart. Dette er en alvorlig mangel i modellen, som vi nu vil forsøge at uddybe matematisk ud fra et simple eksempel.



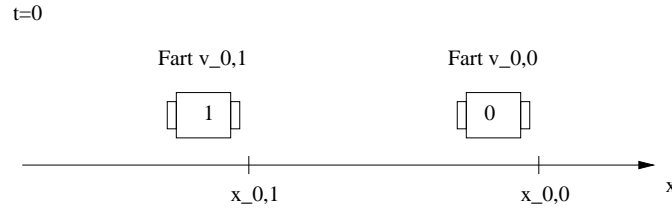
Figur 5.2: Plot af fartfunktioner



Figur 5.3: Plot af stedfunktioner med varierende begyndelsesfart

5.4.2 Tilfældet $n = 2$ med konstant fart for førerbilen

Betydningen af begyndelsesbetingelserne ses allerede for det simpleste tilfælde med kun to biler, d.v.s. $n = 2$, hvor accelerationsfunktionen for førerbilen er nul — altså denne bevæger sig med konstant fart. Vi vil da have nedenstående situation. Bevægelsen for den bagvedliggende bil er



Figur 5.4: Tilfældet med to biler og konstant fart for førerbilen

da fastlagt ved følgende inhomogene andenordens differentiaalligning

$$\ddot{x}_1(t) = \lambda(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) \quad (5.19)$$

Vi har desuden følgende begyndelsesbetingelser for begge biler ud fra ovenstående overvejelser

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{0,1} & x_0(0) &= x_{0,0} \\ \dot{x}_1(0) &= v_{0,1} & \dot{x}_0(0) &= v_{0,0} = \dot{x}_0(t), \end{aligned}$$

hvor det antages, at $x_{0,0} > x_{0,1}$ samt at $v_{0,0}$ er en positiv konstant. Stedfunktionen for førerbilen kan umiddelbart bestemmes ved integration af fartfunktionen $\dot{x}_0(t)$. Ved anvendelse af begyndelsesbetingelser, er det indlysende, at vi får

$$x_0(t) = v_{0,0}t + x_{0,0}.$$

Dernæst kan $x_1(t)$ bestemmes ved løsning af (5.19). Fartfunktionen for førerbilen, $\dot{x}_0(t) = v_{0,0}$, substitueres ind i ligningen og vi får

$$\ddot{x}_1(t) = \lambda(v_{0,0} - \dot{x}_1(t)) \Leftrightarrow \ddot{x}_1(t) + \lambda\dot{x}_1(t) = \lambda v_{0,0}. \quad (5.20)$$

Den generelle løsning til denne differentiaalligning er som bekendt summen af den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning samt en partikulær løsning til den inhomogene ligning. Det ses umiddelbart, at den homogene ligning har den karakteristiske ligning $r^2 + \lambda r = 0$, hvor rødderne er $r = 0 \vee r = -\lambda$. Deraf får vi, at

$$x_{1,homogen}(t) = c_1 e^{-\lambda t} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Med hensyn til den inhomogene ligning er det klart ved indsættelse, at $x_{1,partik}(t) = v_{0,0}t$ er en løsning. Altså er den fuldstændige løsning til (5.20)

$$x_1(t) = x_{1,homogen}(t) + x_{1,partik}(t) = c_1 e^{-\lambda t} + v_{0,0}t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ud fra de opstillede begyndelsesbetingelser kan vi da bestemme løsningen til det oprindelige problem. For $t = 0$ haves, at

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_{0,1} \\ -\lambda c_1 + v_{0,0} &= v_{0,1} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 &= \frac{v_{0,0} - v_{0,1}}{\lambda} \\ c_2 &= x_{0,1} - \frac{v_{0,0} - v_{0,1}}{\lambda}, \end{cases}$$

d.v.s. løsningen til (5.20) med de angivne begyndelsesbetingelser er

$$x_1(t) = \frac{v_{0,0} - v_{0,1}}{\lambda} e^{-\lambda t} + v_{0,0}t + x_{0,1} - \frac{v_{0,0} - v_{0,1}}{\lambda}.$$

Vi vil nu se på betydningen af begyndelsesværdier og parametre, når vi skal afgøre om de to biler når hinanden. Vi ser på ligningen $x_1(t) = x_0(t)$, idet det antages, at $v_{0,0} \neq v_{0,1}$ d.v.s.

$$\begin{aligned} & \frac{v_{0,0} - v_{0,1}}{\lambda} e^{-\lambda t} + v_{0,0}t + x_{0,1} - \frac{v_{0,0} - v_{0,1}}{\lambda} = v_{0,0}t + x_{0,0} \\ \Downarrow & \\ e^{-\lambda t} &= \frac{\lambda(x_{0,0} - x_{0,1}) + (v_{0,0} - v_{0,1})}{v_{0,0} - v_{0,1}} = 1 + \lambda \frac{x_{0,0} - x_{0,1}}{v_{0,0} - v_{0,1}}. \end{aligned}$$

Vi ser, at forholdet i venstresiden af den sidste ligning blot er forholdet mellem den relative begyndelsesafstand og den relative begyndelsesfart; lad da $\Delta x = x_{0,0} - x_{0,1}$ og $\Delta v = v_{0,0} - v_{0,1}$. Vi får så

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\lambda \frac{\Delta x}{\Delta v} + 1 \right).$$

Altså, de to stedfunktioner er potentielt lig hinanden til tiden t . Hvorvidt dette vil være tilfældet, afhænger direkte af størrelsen $\lambda \frac{\Delta x}{\Delta v} + 1$. Den naturlige logaritme er kun defineret for positive reelle tal, d.v.s. vi forlanger, at $\lambda \frac{\Delta x}{\Delta v} + 1 > 0$. Ydermere har vi forudsat, at $t \geq 0$; da det gælder at $\lambda > 0$ skal $\lambda \frac{\Delta x}{\Delta v} + 1 \leq 1$ (den naturlige logaritme til et tal t , $0 < t \leq 1$ er negativt eller nul), d.v.s. samlet har vi

$$0 < \lambda \frac{\Delta x}{\Delta v} + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda \frac{\Delta x}{\Delta v} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} < \frac{\Delta x}{\Delta v} \leq 0.$$

Ovenstående udtryk gør det nu muligt præcist at udtale sig om begyndelsesbetingelsernes betydning. For specialtilfældet $\Delta x = 0$ ses uligheden at have den indlysende løsning $t = 0$. For mere generelle tilfælde gælder, at da $\lambda, \Delta x > 0$, kan der kun være tale om sammenstød/overhaling, når $\Delta v < 0$, d.v.s. når bagvedkørende til tiden $t = 0$ bevæger sig med højere fart end forankørende. Når dette er tilfældet, kan sammenstød forekomme. Hvis f.eks. Δx er lille og Δv er stor, kræves også en relativt stor værdi for λ , d.v.s. en kraftigere reaktion o.s.v. Det må forventes, at resultatet kan generaliseres til tilfældet med flere biler, men afhængigheden af begyndelsesbetingelser kompliceres voldsomt bare ved tre biler. Det inhomogene led i differentialligningen er da betydeligt mere kompliceret, og det er næppe muligt at fastslå eksakte betingelser som ovenfor. Samme metode vil gøre sig gældende i tilfældet, hvor accelerationsfunktionen for førerbilen ikke er nul. Vi undersøgte i vort eksempel sammenhængen mellem stedfunktionerne for to biler i tilfældet, hvor førerbilens acceleration var konstant; de omfattende ligninger i dette tilfælde viste sig imidlertid *ikke* at kunne løses analytisk. Selvom dette eksempel måske virker som en traditionel matematisk argumentation for en given egenskab, er det vigtigt at bemærke, at vi

rent faktisk har fået påpeget en alvorlig svaghed ved netop denne model: Et køretøj kan overhale p.g.a. begyndelsesværdier, men vil *stadig* være afhængig af den oprindeligt forankørende og med tiden indstille farten herefter (og falde bagved igen). Dette har ingen hold i virkeligheden og peger for alvor på, at der er plads til forbedringer. Problemet skyldes, at vores matematiske udgangspunkt er en lineær differentialligning; accelerationen for et givet køretøj er proportional med den relative fart i forhold til forankørende, og dette er *ikke* tilstrækkeligt til at forhindre ovenstående uacceptable opførsel. Dette kan der korrigeres for ved anvendelse af modeltypen 4.6, hvor reaktionens størrelse også afhænger af den relative afstand. Denne afhængighed bevirker, at en bagvedliggende, uanset begyndelsesbetingelser, aldrig vil kunne nå en foranliggende — jo tættere de kommer på hinanden, jo kraftigere vil acceleration/decelerationen blive. Yderligere konklusioner på dette eksempel og den generelle anvendelighed af denne simple, lineære model følger i Afsnit 6.4.

KAPITEL 6

Førsteordens lineære systemer og stabilitet

Vi vil nu som lovet i Afsnit 4.2 se nærmere på stabilitetsspørgsmålet for n køretøjer på en lukket vejstrækning med reaktionstid T , d.v.s. vi har differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1(t+T) &= \lambda(\ddot{x}_n(t) - \dot{x}_1(t)) \\ \ddot{x}_2(t+T) &= \lambda(\ddot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \ddot{x}_n(t+T) &= \lambda(\ddot{x}_{n-1}(t) - \dot{x}_n(t))\end{aligned}, \quad t, T \geq 0, \lambda > 0. \quad (6.1)$$

Dette system er vidt forskelligt fra det simple parvist koblede system, der blev studeret nærmere i Afsnit 5.4, idet koblingen er langt mere kompliceret. Dette kræver yderligere teori for systemer af differentialligninger. Som tidligere nævnt kan enhver n . ordens differentialligning omskrives til et førsteordens lineært differentialligningssystem, d.v.s. teorien for disse er tilstrækkelig.

Idet følgende afsnit vil vi overveje egenskaberne for løsningerne til det generelle lineære homogene førsteordens differentialligningssystem. Bemærk, at vi *ikke* vil overveje det inhomogene tilfælde; homogene systemer er tilstrækkelig i stabilitetsproblematikken. Generaliseringen er dog ikke vanskelig, der henvises til [Nagle, afsnit 9.6].

Fra Appendiks A ved vi, at et lineært system af ligninger kan opstilles på matrix-form, d.v.s. det specielle førsteordenssystem

$$\mathbf{x}'(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(t)x_i(t),$$

kan skrives på formen

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad (6.2)$$

hvor $A(t)$ er matricen med den i . søjlevektor $\mathbf{f}_i(t)$.

Vi vil nu forsøge at karakterisere egenskaberne for løsningerne til dette system. Teorien bag dette er blot en generalisering af selvsamme problem for andenordens differentialligninger, jf. Kapitel 5, hvorfor vi ikke vil gennemføre beviser i alle detaljer.

6.1 Egenskaber for løsninger

6.1.1 Superposition og uafhængighed

Lineariteten i det betragtede system gør det muligt at generalisere det velkendte superpositionsprincip for ordinære differentialligninger.

Sætning 6.1 (Superposition for systemer)

Lad $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ være n løsninger på et åbent interval $I \subseteq \mathbb{R}$ til den homogene differentialligning

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t).$$

Hvis c_1, c_2, \dots, c_n er reelle konstanter, er linearkombinationen

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t),$$

også en løsning på intervallet I .

Beviset følger umiddelbart af linearitet, jf. Afsnit 4.1.5.

Tilsvarende vil vi indføre *lineær uafhængighed* for vektorfunktioner — dette er ikke vanskeligt, idet der blot er tale om en generalisering af lineær uafhængighed mellem vektorer i \mathbb{R}^n , jf. Afsnit A.1.2.

Definition 6.1 (Lineær afhængighed mellem vektorfunktioner)

Lad $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ være vektorfunktioner. Så siges disse at være lineært afhængige hvis sammenhængen

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t) = 0, \quad (6.3)$$

kun har den trivielle løsning, d.v.s. at $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ alle er nul. I modsat fald siges vektorfunktionerne at være lineært uafhængige.

Fra Afsnit A.1.1 ved vi, at (6.3) kun har den trivielle løsning, hvis og kun hvis determinanten

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

er lig nul. Denne determinant vil vi kalde Wronskideterminanten, analogt med vores definitioner under løsning af andenordensligninger. Følgende sætning må da umiddelbart gælde

Sætning 6.2 (Wronskideterminanten og uafhængighed)

Givet vektorfunktionerne $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$, kontinuert på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, gælder, at Wronskideterminanten $W \equiv 0$, hvis og kun hvis $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ er lineært afhængige.

Beviset for sætningen følger umiddelbart af det faktum, at systemet $X(t)\mathbf{c} = 0$ — hvor $X(t)$ er matricen med den i . søjlevektor $\mathbf{x}_i(t)$ — kun har den trivielle løsning, hvis og kun hvis $\det A = 0$.

6.1.2 Generel løsning af homogene differentiaalligningssystemer

Ved hjælp af uafhængighedsbegrebet, kan vi nu se på den generelle løsning til det homogene differentiaalligningssystem. Som for homogene andenordensligninger viser det sig, at ved lineær uafhængighed mellem et tilstrækkeligt antal løsninger kan den generelle løsning konstrueres.

Sætning 6.3 (Generel løsning til homogene systemer)

Lad $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ være n lineært uafhængige løsninger til det homogene differentiaalligningssystem

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t),$$

på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og $n \times n$ matricen $A(t)$ være kontinuert på I .

Da kan enhver løsning til differentiaalligningssystemet udtrykkes på formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t),$$

for alle $t \in I$.

Følgende bevis bygger på at vi antager to forskellige løsninger og dernæst viser, at hvis disses begyndelsesværdier er ens, så er de to løsninger ens.

BEVIS: Lad $a \in I$. Vi vil nu vise, at der eksisterer konstanter $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ således, at løsningen

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t),$$

har de samme begyndelsesværdier for $t = a$ som $\mathbf{x}(t)$ hvorved

$$c_1 \mathbf{x}_1(a) + c_2 \mathbf{x}_2(a) + \cdots + c_n \mathbf{x}_n(a) = \mathbf{x}(a). \quad (6.4)$$

Lad $X(t)$ være $n \times n$ matricen med søjlevektorerne $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, og lad \mathbf{c} være vektoren med komponenterne c_1, c_2, \dots, c_n . Da kan (6.4) omskrives til

$$X(a)\mathbf{c} = \mathbf{x}(a). \quad (6.5)$$

Wronskideterminanten $W(X(a)) = \det X(a) \neq 0$ da $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ er lineært uafhængige. Derfor har $X(a)$ en invers matrix $X^{-1}(a)$ og $\mathbf{c} = X^{-1}(a)\mathbf{x}(a)$, der som ønsket tilfredsstillers (6.5). Det ses så, at de givne løsninger $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{y}(t)$, med værdierne for c_1, c_2, \dots, c_n fundet ved ligningen $\mathbf{c} = X^{-1}(a)\mathbf{x}(a)$, har de samme begyndelsesværdier for $t = a$ og derfor følger af eksistens og entydighed, Sætning 4.1, at $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$. ■

6.2 Generel løsning til det homogene lineære system med konstante koeffi c ienter

Vi vil nu undersøge det specielle tilfælde for det homogene lineære system $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, hvor alle indgange i $A(t)$ er reelle konstanter. Vi vil derfor skrive systemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad (6.6)$$

hvor A er en kvadratisk matrix og $\mathbf{x}(t) \in I \subseteq \mathbb{R}^n$.

Konstante koeffi c ienter ses at være tilstrækkeligt i behandlingen af det koblede system i forbindelse med stabilitetsspørgsmålet, jf. (6.1).

6.2.1 Løsning af systemet

Vi vil nu indføre et nyt begreb, der viser sig at have afgørende betydning for løsningen til (6.6).

Definition 6.2 (Egenvektor)

Lad A være en kvadratisk matrix. Hvis \mathbf{u} er en ikke-triviell løsning til ligningen

$$A\mathbf{u} = r\mathbf{u}, \quad (6.7)$$

for en (kompleks) skalar r , siges \mathbf{u} at være en *eigenvektor* til A med *eigenværdi* r .

V.h.a. egenvektorbegrebet er det nu muligt umiddelbart at udtale sig om specielle ikke-trivielle løsninger til (6.7).

Sætning 6.4 (Løsning)

Givet det førsteordens lineære system

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$

gælder, at hvis \mathbf{u} er en egenvektor til A med egenværdi r , så er

$$\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u},$$

en ikke-triviel løsning til systemet.

BEVIS: Antag, at $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u}$ er en løsning til systemet, hvor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Ved indsættelse fås

$$\mathbf{x}'(t) = re^{rt}\mathbf{u} = Ae^{rt}\mathbf{u} = A\mathbf{x}(t) \Leftrightarrow A\mathbf{u} = r\mathbf{u}, \quad (6.8)$$

idet $e^{rt} \neq 0$ for alle t . D.v.s. $\mathbf{x}(t)$ er en løsning, hvis og kun hvis \mathbf{u} er en egenvektor til A med egenværdi r . ■

Helt konkret kan vi finde egenvektorerne for en matrix A ved en nærmere undersøgelse af (6.7).

Denne ligning ses at være ækvivalent med følgende homogene system,

$$(A - rI)\mathbf{u} = 0,$$

hvor I er identitetsmatricen. I definitionen forlanges en egenvektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ forskellig fra nulvektoren, d.v.s. vi forlanger ikke-trivielle løsninger. Dette vil kun være tilfældet, jf. Sætning A.4, hvis betingelsen

$$\det(A - rI) = 0,$$

er opfyldt. Vi kan umiddelbart argumentere for, at $\det(A - rI)$ må være et polynomium af grad n . I udregningen af determinanten, jf. Afsnit A.1.1, vil en faktor $a_{ij} - r$ indgå i første led af summen netop n gange; dette fremgår direkte af den rekursive definition. I de øvrige led, vil faktoren $a_{ij} - r$ indgå $n - 1$ gange, d.v.s. determinanten må være et n . grads polynomium.

Fra algebraens fundamentalsætning, jf. Sætning B.2, ved vi, at dette polynomium vil have netop n rødder (reelle, komplekse eller gentagede), d.v.s. ved beregning af disse fås n egenværdier, $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$, til $n \times n$ matricen A . De respektive egenvektorer bestemmes da ved løsning af ligningen $(A - r_i\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$. Det følger dermed, at vi altid kan bestemme n løsninger til (6.6).

Spørgsmålet er nu blot, i hvilke tilfælde metoden kan bruges til at finde n lineært uafhængige løsninger. I sådanne tilfælde vil man, jf. Sætning 6.3, have den generelle løsning til det homogene førsteordens lineære system med konstante koefficienter. Det viser sig, at der for lineær uafhængighed mellem egenvektorerne til en matrix A kræves, at A har n forskellige egenværdier. I det følgende antages, at disse egenværdier er reelle, men generaliseringen til komplekse egenværdier er simpel.

Sætning 6.5 (Uafhængighed mellem egenvektorer)

Lad A være en $n \times n$ matrix. Egenvektorerne til A er lineært uafhængige, hvis A har netop n forskellige egenverdier, r_1, r_2, \dots, r_n .

BEVIS: Vi beviser her kun tilfældet, hvor $n = 2$; det generelle tilfælde bevises tilsvarende v.h.a. induktion. Antag, at de to egenvektorer \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 er lineært afhængige, men har forskellige egenverdier, d.v.s. $\mathbf{u}_1 = c\mathbf{u}_2$ for en konstant c og $r_1 \neq r_2$. Vi har da

$$A\mathbf{u}_1 = A(c\mathbf{u}_2) = cA\mathbf{u}_2 \Leftrightarrow r_1\mathbf{u}_1 = cr_1\mathbf{u}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,$$

d.v.s. en modstrid, hvorfor \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 må være lineært uafhængige. ■

Sætning 6.6 (Generel løsning)

Lad A være en $n \times n$ matrix. Antag, at $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ er n lineært uafhængige egenvektorer til A med tilhørende egenverdier r_1, r_2, \dots, r_n .

Hvis $\mathbf{x}_i(t) = e^{r_i t}\mathbf{u}_i$, $1 \leq i \leq n$, så er den fuldstændige løsning til

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$

på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ givet ved linearkombinationen

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t),$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

BEVIS: Af antagelsen om lineær uafhængighed mellem egenvektorerne følger direkte, at Wronskideterminanten $W(c_1\mathbf{x}_1, c_2\mathbf{x}_2(t), \dots, c_n\mathbf{x}_n(t)) \neq 0$, og linearkombinationen er derfor den fuldstændige løsning. ■

Korollar 6.1

Hvis $n \times n$ matricen A har n forskellige egenverdier r_1, r_2, \dots, r_n er den fuldstændige løsning til $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{r_i t} \mathbf{u}_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Ovenstående følger umiddelbart af Sætning 6.5.

Antagelsen om n forskellige rødder stiller visse begrænsninger for koefficientmatricen, men ovenstående viser sig at være tilstrækkeligt i vores tilfælde. Det er imidlertid heller ikke vanskeligt at konstruere en fuldstændig løsning i det generelle tilfælde, for detaljer henvises til [EdPen93, afsnit 5.6].

EKSEMPEL 7

Vi har differentiaalligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 6x_1(t) - 7x_2(t) \\x_2'(t) &= x_1(t) - 2x_2(t).\end{aligned}\tag{6.9}$$

Dette kan vi opskrive, ved hjælp af matrixnotation, på formen

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

For at løse dette system skal vi bruge egenværdierne til A

$$\det(A - r \cdot I) = \begin{vmatrix} 6-r & -7 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = (6-r)(-2-r) + 7 = r^2 - 4r - 5 = (r+1)(r-5).$$

Hvilket giver os egenværdierne $r = -1 \vee r = 5$.

For vores koefficientmatrix tager egenvektork ligningen formen

$$\begin{bmatrix} 6-r & -7 \\ 1 & -2-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\tag{6.10}$$

for den associerede egenvektor $[a \ b]^T$.

For $r = -1$

I (6.10) substituerer vi egenværdien $r = -1$ og får

$$\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vælger $a = 1$, hvilket giver os egenvektoren $u_1 = [1 \ 1]^T$ knyttet til $r = -1$.

For $r = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vælger $b = 1$, hvilket giver os egenvektoren $u_2 = [7 \ 1]^T$ knyttet til $r = 5$. Vores to egenværdier med tilknyttede egenvektorer giver os to løsninger til (6.9)

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Idet Wronskideterminanten

$$\begin{vmatrix} 7e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{vmatrix} = 6e^{4t},$$

aldrig er nul er \mathbf{x}_1 og \mathbf{x}_2 lineært uafhængige, og den generelle løsning kan opskrives

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Denne kan omskrives til

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 7c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I Afsnit 6.2 har vi antaget reelle egenverdier og dermed også egenvektorer med reelle komponenter. Dog omfatter teorien også de tilfælde, hvor en eller flere af egenverdierne af reelle — komplekse egenverdier er en nødvendig antagelse i det generelle tilfælde, hvor koefficientmatricen ikke er eksplicit givet.

6.2.2 Forskellige komplekse egenverdier

For komplekse egenverdier gælder det samme som for reelle egenverdier, forudsat at de er forskellige. Den eneste afgørende forskel er, at for en kompleks egenverdi r er den tilhørende egenvektor \mathbf{u} også kompleks. Følgende sætning gælder

Sætning 6.7 (Løsninger tilhørende en kompleks egenverdi)

Lad det homogene lineære differentiaalligningssystem være givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$

hvor A er en kvadratisk matrix med reelle indgange. Antag, at \mathbf{u}_1 er en egenvektor med egenverdi $r_1 \in \mathbb{C}$. Så er

$$e^{r_1 t} \mathbf{u}_1 \quad \text{og} \quad e^{\bar{r}_1 t} \bar{\mathbf{u}}_1,$$

to lineært uafhængige løsninger til differentiaalligningssystemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

BEVIS: Det er klart, at hvis $r_1 \in \mathbb{C}$ er en egenverdi, er også \bar{r}_1 en egenverdi; de er begge rødder i det karakteristiske polynomium. Hvis $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$ er en egenvektor til r_1 , så er $\mathbf{a} - i\mathbf{b}$ en egenvektor til r_2 , idet vi kan konjugere følgende ligning

$$(A - r_1 I)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

og får

$$(A - \bar{r}_1 I)\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}.$$

Af Sætning 6.4 og 6.5 følger da, at $e^{r_1 t} \mathbf{u}_1$ og $e^{\bar{r}_1 t} \bar{\mathbf{u}}_1$ er lineært uafhængige løsninger. ■

Ovenstående generelle form viser sig tilstrækkelig til vores brug, men det er ikke vanskeligt at skrive de komplekse eksponentialfunktioner ud i reelle løsninger. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{rt} \mathbf{u} = e^{(p+iq)t} \mathbf{u} \\ &= e^{pt} (\cos qt + i \sin qt) (\mathbf{a} + i\mathbf{b}),\end{aligned}$$

altså

$$\mathbf{x}(t) = e^{pt} (\mathbf{a} \cos qt - \mathbf{b} \sin qt) + ie^{pt} (\mathbf{b} \cos qt + \mathbf{a} \sin qt).$$

6.3 Stabilitetsanalyse

Vi vil nu overveje det oprindelige spørgsmål for vores mikroskopiske model — hvornår er der stabilitet for et system med n køretøjer på en lukket strækning? Udgangspunktet er som bekendt differentilligningssystemet

$$\ddot{x}_k(t+T) = \lambda(\dot{x}_{k-1}(t) - \dot{x}_k(t)), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (6.11)$$

hvor $T \geq 0$ er reaktionstiden, $\lambda > 0$ er en proportionalitetskonstant og $x_k(t)$ stedfunktionen for det k . køretøj. I det lukkede system vil ydermere gælde, at $x_0(t) = x_n(t)$.

Lad $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$; så kan systemet omskrives til følgende førsteordenssystem på matrixform, jf. Appendiks A

$$\dot{\mathbf{v}}(t+T) = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) = \lambda A \mathbf{v}(t). \quad (6.12)$$

Spørgsmålet er nu — hvornår er der stabilitet, d.v.s. hvornår udvikler alle fartfunktioner sig asymptotisk for $t \rightarrow \infty$? Det er klart, at såfremt alle køretøjer, når $t = 0$, har samme, konstante fart, vil der være stabilitet. Det, vi nu ønsker at undersøge er, hvornår der vil være stabilitet, når der er mindre variationer i startbetingelserne fra køretøj til køretøj.

Lad os først give en præcis definition på det matematiske begreb *stabilitet for systemer af differentilligninger*.

Definition 6.3 (Stabilitet)

Førsteordenssystemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ siges at være *stabil*, hvis alle løsninger er begrænsede for $t \geq 0$, d.v.s. hvis $x(t)$ er en løsning, $t \in I$, så eksisterer et $c \in \mathbb{R} < \infty$, således at $|x(t)| < c$ for alle $t \in I$.

Hvis alle løsninger går mod nul, når $t \rightarrow \infty$ siges systemet at være *asymptotisk stabil*.

Sætning 6.8 (Betingelser for stabilitet)

Førsteordenssystemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ er stabil, hvis og kun hvis alle egenverdier for matricen A har ikke-positiv realdel. Systemet er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis alle egenverdier har negativ realdel.

BEVIS: Lad α_j være den j . egenverdi til A og $\mathbf{u}_j(t)$ være den tilsvarende egenvektor. Den generelle løsning til systemet er da

$$\mathbf{x}(t) = \sum e^{\alpha_j t} \mathbf{u}_j, \quad \alpha_j, u_i \in \mathbb{C}.$$

Lad $\alpha_j = a_j + ib_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, d.v.s.

$$e^{\alpha_j t} = e^{(a_j + ib_j)t} = e^{a_j t} e^{ib_j t} = e^{a_j t} (\cos b_j t + i \sin b_j t).$$

Det er klart, at $\cos b_j t + i \sin b_j t$ er begrænset for alle $t \in \mathbb{R}$ uanset α_j . Ustabilitet kan derfor kun forårsages af faktoren $e^{a_j t}$ altså af $a = \operatorname{Re}[\alpha_j]$.

1. Antag først, at $\operatorname{Re}[\alpha_j] = a_j < 0$. Så følger direkte af egenskaberne for eksponentialfunktionen, at $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_j t} = 0$, og systemet er derfor asymptotisk stabil.
2. Hvis $\operatorname{Re}[\alpha_j] = a_j = 0$, er alle $e^{a_j t} = 1$, altså begrænsning, hvorfor systemet er stabil.
3. Slutteligt, hvis $\operatorname{Re}[\alpha_j] = a_j > 0$, er $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_j t} = \infty$, og systemet er ikke stabil.

Sætningen er hermed bevist. ■

Vi postulerer da, at systemet (6.12) er stabil, såfremt produktet $\lambda T \leq \frac{1}{2}$. Vi vil nu argumentere for dette resultat, men det bør bemærkes, at de følgende afsnit er baseret på egne overvejelser, og kan derfor ikke forventes at være fuldstændig dækkende for stabilitetsproblematikken. Vores metode bygger på simpel teori for differentiallygningsystemer, hvorimod den typiske, generelle analyse af problemet bygger på en løsningsmetode til systemer baseret på approksimationer med forskellige rækkeudviklinger, se evt. [Rothery, afsnit 4.2] for detaljer.

6.3.1 Stabilitet og parameterafhængighed

Lad os først skitsere den matematiske metode i vores argumentation: Da (6.12) er et førsteordens lineært system ved vi, at løsningen er en linearkombination af vektorfunktioner af typen $\mathbf{v}(t) = e^{\alpha_j t} \mathbf{u}_j$. Vi forlanger da, at alle $\alpha_i \leq 0$ for begrænsning på alle løsninger. Hvordan kan vi afgøre, hvornår dette er tilfældet? P.g.a. forsinkelsesfaktoren er det uhensigtsmæssigt at se direkte på (6.12); vi anvender derfor en omskrivningsmetode, hvor vi ved substitution af en løsning $\mathbf{v}(t) = e^{\alpha_j t} \mathbf{u}_j$ når frem til den betingelse, at en værdi afhængig af λ , T og α_j skal være egen værdi for en ny matrix, såfremt $\mathbf{v}(t)$ skal være en løsning til (6.12). D.v.s. hvis man kan finde en løsning til det nye egen værdiproblem, hvor $\operatorname{Re}[\alpha_j] > 0$, så vil der være potentiel ustabilitet i den oprindelige ligning.

Vi forlanger altså for (6.12), at *alle* egen værdier for koefficientmatricen A har ikke-positiv realdel ($\alpha_j \leq 0$) således, at *alle* løsninger $\mathbf{v}(t) = e^{\alpha_j t} \mathbf{u}$ er begrænsede. Som nævnt er det uhensigtsmæssigt at se direkte på egen værdierne for A p.g.a. den komplicerede reaktionstid T . Vi anvender i stedet omskrivningsmetoden.

Lad matricen S være givet ved

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så kan (6.12) opskrives som

$$\dot{\mathbf{v}}(t + T) = \lambda(S - I)\mathbf{v}(t). \quad (6.13)$$

Da den generelle løsning som bekendt er en superposition af vektorfunktioner af typen $\mathbf{v}(t) = e^{\alpha t} \mathbf{u}$, $\alpha, u_j \in \mathbf{C}$, substitueres dette ind i ovenstående

$$\alpha e^{\alpha T} e^{\alpha t} \mathbf{u} = \lambda(S - I)e^{\alpha t} \mathbf{u} \Leftrightarrow \left(S - \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} e^{\alpha T} \right) I \right) \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (6.14)$$

Af definitionen på egen værdier/egenvektorer, jf. Definition 6.2, ses det, at \mathbf{u} er en egenvektor til S med egen værdi $1 + \frac{\alpha}{\lambda} e^{\alpha T}$.

Det må da gælde, at hvis man ved variation af parametrene λ og T kan konstruere en løsning til ovenstående egen værdiproblem, hvor $\operatorname{Re}[\alpha] > 0$, så vil der være potentiel ustabilitet i (6.12), idet de to udtryk er ækvivalente. Dette kræver, at vi først ser nærmere på formen af de generelle egen værdier for den kvadratiske matrix S .

Vi kan vise, at det karakteristiske polynomium for S er $x^n - 1$. Det karakteristiske polynomium er som bekendt $\det(S - rI)$, $r \in \mathbf{C}$. For enhver kvadratisk matrix A , jf. Afsnit A.1.1,

defineres determinanten rekursivt som

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i}.$$

Lad $A = S - rI$. For ethvert valg af n er kun $a_{11} = -r$ og $a_{1n} = 1$ forskellige fra nul. Altså fås

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} = -r \det A_{11} + (-1)^{1+n} \det A_{1n}.$$

Det er ikke vanskeligt at overbevise sig om, at $\det A_{11} = (-r)^{n-1}$, samt at $\det A_{1n} = 1$. D.v.s. vi får

$$\det A = -r(-r)^{n-1} + (-1)^{1+n} = (-r)^n + (-1)^{1+n}.$$

Afhængig af om n er lige eller ulige bliver polynomierne enten $p(r) = -r^n + 1$ eller $p(r) = r^n - 1$, d.v.s. vi får ligningen $p(r) = r^n - 1 = 0$ for egenverdier. I Appendiks A vises det, at løsningen til denne polynomiumsligning er de første n enhedsrødder, hvor den k . rod kan skrives på formen

$$r_k = (e^{i\theta})^k = (\cos \theta + i \sin \theta)^k, \quad \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Hvis n er stor, d.v.s. i tilfældet med mange køretøjer, vil rødderne ligge tæt, hvorfor den diskrete funktion $(e^{i\theta})^k$ kan approksimeres med $e^{i\phi}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (n -kanten af enhedsrødder approksimeres med enhedscirklen). Denne approksimering anvendes da til at sætte begrænsninger på $1 + \frac{\alpha}{\lambda} e^{\alpha T}$. Såfremt denne værdi skal være egenverdi til S , skal den nødvendigvis have form som S ' egenverdier generelt, altså

$$1 + \frac{\alpha}{\lambda} e^{\alpha T} = e^{i\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

og lad $z = \alpha T \in \mathbb{C}$. Så kan ovenstående omskrives til

$$ze^z = \lambda T (e^{i\phi} - 1). \quad (6.15)$$

Hvordan er ovenstående så relateret til stabilitetsspørgsmålet? Hvis (6.15) har løsninger for et bestemt parametervalg, λ og T for tilfældet $\operatorname{Re}[\alpha] > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}[z] > 0$, så vil samme parametervalg i (6.12) give ustabilitet, da (6.14) og (6.12) er algebraisk ækvivalente.

Hvorvidt der findes sådanne løsninger, kan *kun afhænge af parameteren λT* .

BEMÆRKNING: Denne konklusion er ikke *helt* korrekt, idet vi kunne risikere, at ligningen slet ikke har nogen løsning uanset parametervalg. En nærmere undersøgelse viser dog, at dette ikke er tilfældet, jf. nedenfor.

6.3.2 Begrænsninger på λT

V.h.a. en relativt simpel *ad hoc* metode er det faktisk muligt, konkret at bestemme begrænsningerne på λT . Lad os overveje det kritiske tilfælde for (6.15), hvor $\operatorname{Re}[z] = \operatorname{Re}[\alpha T] = 0$ (netop på grænsen til ustabilitet). Vi kan da skrive $z = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ og får ligningen

$$\frac{i\beta}{\lambda T} e^{\beta i} = \lambda T (e^{i\phi} - 1).$$

Ved udvidelse i trigonometriske funktioner, jf. Appendiks B, fås da

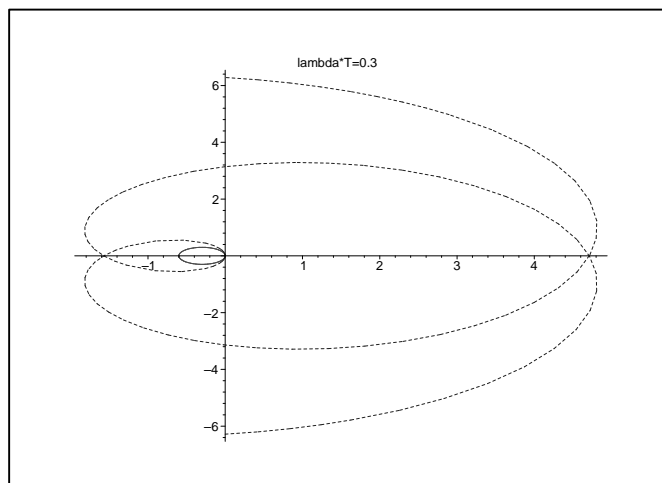
$$i\beta \cos \beta - \beta \sin \beta = \lambda T (\cos \phi - 1 + i \sin \phi).$$

To komplekse tal er som bekendt kun lig hinanden, hvis de to tal har samme real- og imaginærdel, d.v.s. vi kan opstille ligningssystemet

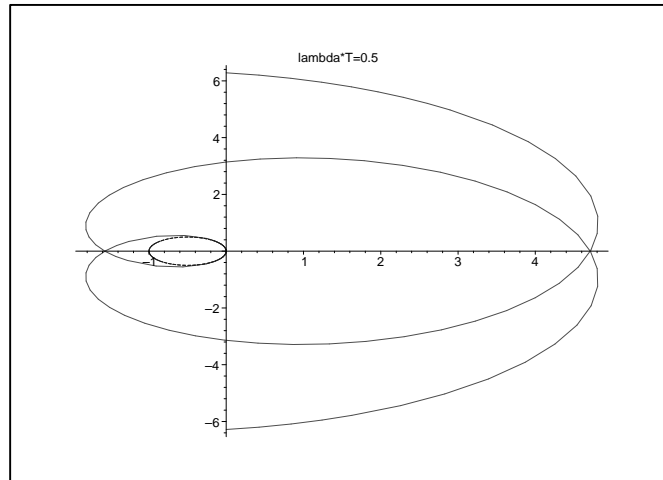
$$\begin{cases} -\beta \sin \beta & = & \lambda T (\cos \phi - 1) \\ \beta \cos \beta & = & \lambda T \sin \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (6.16)$$

Hvis ovenstående har en løsning for et givet parametervalg λT , vil vi således have potentiel ustabilitet i (6.12). Grafisk kan problemet opfattes, som det at finde skæringen mellem to parameterfremstillinger i planen.

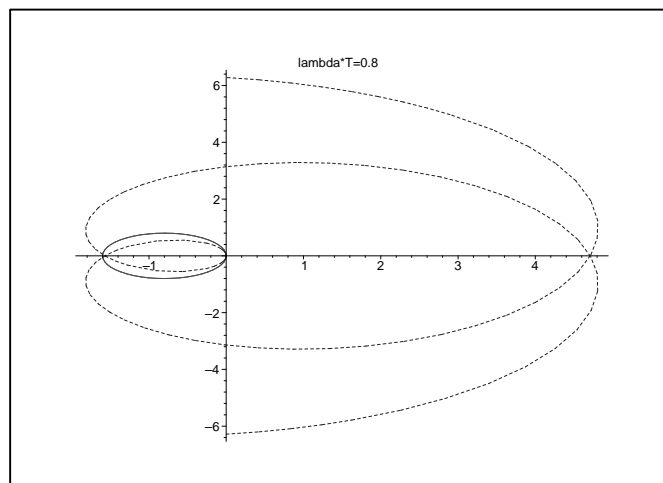
Figureerne 6.1, 6.2 og 6.3 viser tre forskellige plots udført i Maple med varierende værdier af λT . Den stiplede graf er parameterfremstillingen for venstresiden af ovenstående ligningssystem, d.v.s. $(x, y) = (-t \sin t, t \cos t)$, mens den ubrudte er grafen for højresiden, $(x, y) = (\lambda T (\cos t - 1), \lambda T \sin t)$.



Figur 6.1: $\lambda T = 0,3$



Figur 6.2: $\lambda T = 0,5$



Figur 6.3: $\lambda T = 0,8$

Det fremgår af Figureerne 6.1, 6.2 og 6.3, at hvis $\lambda T \lesssim \frac{1}{2}$, har (6.16) netop ingen løsning. Som omtalt i skitsen over vores metode, betyder dette, at der ikke er nogen løsning til egen-værdiproblemet (6.14) for et α med positiv realdel for parametervalg, hvor $\lambda T \lesssim \frac{1}{2}$, d.v.s. egenværdierne for koefficientmatricen A i (6.12) vil have ikke-positive realdele, og dermed er der stabilitet.

6.4 Anvendelighed af model fra en praktisk vinkel

Efter den omfattende modeldannelse og de mange matematiske undersøgelser af den opstillede simple mikroskopiske model, er det nu værd at overveje, hvad resultatet af den praktiske undersøgelse egentlig er. Blev vi bekræftet i vores vurdering fra Afsnit 2.3?

I rapporten har vi behandlet de følgende to eksempler på modelanvendelse

1. Tilfældet med $n + 1$ køretøjer på en lige vejstrækning uden reaktionstid og med konstant fart for førerkøretøjet.
2. Tilfældet med n køretøjer *med reaktionstid* på en lukket (cirkulær) vejstrækning.

Lad os nu forsøge at vurdere validiteten af disse modelresultater ved at sammenholde dem med alment kendte empiriske fakta om trafik.

For tilfældet i 1) kan der efter den praktiske behandling næppe være nogen tvivl om, at modelanvendelsen tvivlsomt kan få nogen egentlig praktisk betydning i den bredeste forstand. Allerede på dette forholdsvis simple matematiske niveau, udviser modellen besynderlig opførsel i specialtilfælde, der faktisk ligger indenfor gyldighedsområdet — og derfor må vi konkludere, at modellen i dens nuværende form som en konkret, umiddelbar beskrivelse af trafik ikke er tilstrækkelig. Dog skal bemærkes, at der er en afgørende forskel mellem en analyse af de umiddelbare resultater og analysen af stabilitet, punkt 2), der rækker betydeligt dybere.

Her griber vi dybere ned i de matematiske egenskaber og anvender abstraktion og matematisk tænkning som metode til at nå frem til mere skjulte egenskaber i den semipraktiske trafiksituation. Tilfældet med et givet antal køretøjer på en cirkulær vej i sig selv har ikke nogen praktisk analog, er resultaterne stadig interessante, når vi forlader den matematiske abstraktion og vender tilbage til et mere jordnært niveau. Selvom man kan betvivle den eksakte ellers karakter af konklusionen, at $\lambda T \lesssim \frac{1}{2}$ i virkelige situationer, har vi formået v.h.a. matematik at gøre rede for, at stabilitet i tæt trafik bl.a. afhænger af de enkelte førers aggression (svarende til sensitivitetskoefficienten) og reaktionstid. I en empirisk sammenhæng er dette ikke overraskende, men det gør imidlertid ikke resultatet mindre vigtigt, for det viser, at modellen i nogen grad har kunnet eftergøre simple empiriske fakta. Dette er en afgørende egenskab, for det fremhæver vigtigheden af sådanne semipraktiske undersøgelser som middel til effektiv og anvendelig modelopstilling. Det bekræfter os ligeledes i vurderingen fra Afsnit 2.3, at modellen vil være et udmærket udgangspunkt for videreudvikling, selvom dens umiddelbare egenskaber er utilstrækkelige. Men specielt har den matematiske behandling vist os vigtigheden i at skelne mellem resultaternes niveauer. Selvom visse simple forudsigelser ikke kan anvendes direkte, har modellen dybereliggende resultater, der faktisk er ganske relevante.

KAPITEL 7

Konklusion

Vi har i denne rapport undersøgt anvendelsen af matematiske og teoretiske modeller i trafik ud fra en praktisk vinkel. Først opstillede vi en simpel, fysisk betonet model, hvis formål var at eftergøre trafiks opførsel på mikroskopisk niveau, altså et niveau, hvor de individuelle køretøjer betragtes. Vi argumenterede for modellens relevans i særlige trafiksituationer og konkluderede desuden, at det fysiske afgrænsningsområde var et udmærket alment grundlag for videreudvikling af modeltypen. Dog vurderede vi allerede her, at modelanvendeligheden ville være begrænset p.g.a. det smalle afgrænsningsniveau; modellen var snarere en beskrivelse af den opgave, det er at føre et køretøj i en trafiksituation.

Dernæst foretog vi en undersøgelse af trafikplanlæggerens arbejde og den sammenhæng, han indgår i på baggrund af litteratur samt et interview med trafikplanlægger Anker Lohmann-Hansen (Institut for Samfundsudvikling og Planlægning, AUC). Det viste sig, at den tætte kobling mellem det praktiske og det teoretiske problem (det tekniske og det samfundsrelaterede), begrænsede modelanvendelsen i planlægningsarbejdet til hovedsagelig empiriske og praktiske betonedede overvejelser. Anvendelsen af teoretiske modeller af den mikroskopiske type har først for nyligt vundet indpas i særligt komplicerede og specielle planlægningssituationer, hvor EDB og simulering er et nyttigt værktøj.

Derefter indførte vi teori for differentiallyigninger og omformulerede herudfra den tidligere fundne modelligning til *et lineært system af differentiallyigninger* med henblik på en nærmere undersøgelse af visse af modellens egenskaber samt en mere konkret, matematisk funderet vurdering af praktisk anvendelighed. Dette blev gjort ud fra to semipraktiske, konstruerede eksempler: $n + 1$ køretøjer på en lige vejstrækning uden reaktionstid samt n køretøjer på en cirkulær vejstrækning med reaktionstid. Vi så på forskellige typer koblinger mellem differentiallyigningerne.

Første tilfælde viste sig at kunne undersøges ud fra teorien om ordinære differentiaalligninger af andenorden og v.h.a. Maple undersøgte vi et system med 4 biler. Begyndelsesbetingelser viste sig at være af afgørende betydning for udviklingen, og i specielle situationer gav modellen utilfredsstillende resultater.

For tilfældet med n køretøjer på en cirkulær strækning, indførtes grundlæggende resultater og metoder for generelle systemer af differentiaalligninger. Disse dannede grundlag for en karakterisation og undersøgelse af stabilitet i det lukkede system med reaktionstid. Det viste sig, at der tilsyneladende var tale om stabilitet (d.v.s. alle fartfunktioner for køretøjerne var begrænsede), såfremt produktet af to parametre (svarende til reaktionstid og et gennemsnit af førernes aggression) i modelleringen var mindre end en vis værdi. Vi argumenterede for, at den eksakte værdi af resultatet næppe havde den store betydning, men at den matematiske forudsigelse var i god overensstemmelse med intuition og empiri. Derfor vurderede vi, at også de matematiske resultater pegede på, at modellen først og fremmest udmærkede sig som udviklingsgrundlag for mere avancerede modeller.

Endelig konkluderede vi, at de praktisk matematiske resultater stemte overens med den oprindelige vurdering af modellen, samt at det er afgørende at skelne mellem resultater på forskellige niveauer.

I vores arbejde har ovenstående resultater alle været interessante og mere eller mindre uventede, idet vi som udgangspunkt forventede en betydeligt større anvendelse og anvendelighed af teoretiske modeller i trafikplanlægning — men både den kontekstuelle og den matematiske undersøgelse viste imidlertid, at dette ikke var tilfældet.

Litteratur

- [AndBöi92] Anderson, Karl Gustav og Böiers, Lars-Christer: “*Ordinära differentialekvationer*” — 2. udgave, Studentlitteratur, 1992.
- [Beachy96] Beachy, John A. og Blair, William D.: “*Abstract Algebra*” — 2. udgave, Waveland Press 1996.
- [EdPen93] Edwards, Henry C. og Penney, David E.: “*Elementary Differential Equations With Boundary Value Problems*” — 3. udgave, Prentice Hall, 1993.
- [Elbrønd96] Jensen, H. Elbrønd: “*Matematisk Analyse 1*” — 3. udgave, Institut for matematik, 1996.
- [Lay00] Lay, David C: “*Linear Algebra And Its Applications*” — 2. udgave, Addison-Wesley, 2000.
- [Nagle96] Nagle, R. Kent og Saff, Edward B.: “*Fundamentals Of Differential Equations And Boundary Value Problems*” — 2. Edition, Addison-Wesley, 1996.
- [Rothery] Rothery, Richard W.: “*Car Following Models*” — kap. 4 i “Traffic Flow Theory”, <http://www-cta.ornl.gov/cta/research/trb/tft.html>
- [Scen00] “*Scenarier for biltrafikken 1996-2020*”, Transportrådet 2000.
- [Skov90] Skovsmose, Ole: “*Ud over matematikken*” — Systime, 1990.
- [Stat01] “*Statistisk Tiårsoversigt 2001*”, Danmarks Statistik 2001.
- [Wohl67] Wohl, Martin et al: “*Traffic System Analysis For Engineers And Planners*” — McGraw-Hill, 1967.
- [InfStruk00] “*Udvikling af infrastruktur i Aalborg-området*”, rapport fra infrastrukturudvalget Aalborg Kommune, juni 2000.

Øvrige kilder: Interview med trafikplanlægger (Assistant Professor) Anker Lohmann-Hansen, Institut for Samfundsudvikling og Planlægning, Aalborg Universitet.

APPENDIKS A

Lineær algebra

A.1 Ligningssystemer på matrixform

Følgende appendiks skal opfattes som en kort gennemgang af resultater fra lineær algebra, der anvendes i rapporten. Det forudsættes derfor, at læseren har et vist kendskab til grundlæggende matrixmetoder for lineære ligningssystemer.

Definition A.1

Et $m \times n$ lineært ligningssystem i variablene x_1, x_2, \dots, x_n er et ligningssystem på formen

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b},$$

hvor alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ og $x_j \in \mathbb{R}$.

I *matrixnotation* kan ethvert lineært system skrives på formen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Dette skriver vi på en mere kompakt notation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; eller $A(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvis vi lader indgangene i A være funktioner af en variabel t , $a_{ij} = f_{ij}(t)$.

A.1.1 Inverse matricer og determinanter

Vi vil nu overveje eksistens og form af løsninger i det generelle tilfælde med kvadratiske ligningssystemer.

Definition A.2 (Invers matrix)

Lad A være en $n \times n$ matrix. Hvis der eksisterer en matrix C , således at

$$AC = CA = I,$$

hvor I er identitetsmatricen, siges A at være *invertibel* med den inverse $A^{-1} = C$.

Inverse matricer giver en generel metode til løsning af en særlig type af kvadratiske lineære ligningssystemer. Dette fremgår af nedenstående sætning

Sætning A.1 (Løsning til lineære ligningssystemer)

Lad A være en invertibel $n \times n$ matrix og lad $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Givet ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, antag, at \mathbf{x} er en løsning. Så er $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

BEVIS: Vi ser, at \mathbf{x} er en løsning, idet $A(A^{-1}\mathbf{b}) = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Antag nu, at \mathbf{u} er en løsning. Så er $\mathbf{u} = \mathbf{x}$, idet $\mathbf{u} = A^{-1}A\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b}$. ■

D.v.s. en nødvendig betingelse for en unik løsning til det kvadratiske ligningssystem er, at der eksisterer en invers matrix til koefficientmatricen. Ved indførelse af *determinanten til en matrix* er det imidlertid muligt at opstille en ækvivalent betingelse, der i visse teoretiske situationer er lettere at anvende direkte.¹

Vi vil til enhver $n \times n$ matrix A , $n \geq 2$ knytte en skalar $\det A$, som benævnes *determinanten* til A .

¹I konkrete beregningssituationer er den imidlertid uhensigtsmæssig, da kompleksiteten for determinantberegning er betydeligt større, end ved den såkaldte Gauss-Jordan reduktion.

Definition A.3 (Determinant)

For en $n \times n$, matrix A , $n \geq 2$, defineres *determinanten* til A som

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j},$$

hvor A_{ij} er den matrix, der fremkommer ved at slette den i . række og den j . søjle i A .

Sætning A.2 (Betingelse for invertibilitet)

En kvadratisk matrix A er invertibel, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

For bevis henvises til [Lay00, kapitel 3.2].

Korollar A.1 (Unik løsning)

Det lineære ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik løsning, hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

A.1.2 Det homogene lineære ligningssystem

Vi vil kort se nærmere på betingelser for ikke-trivielle løsninger til det specielle homogene lineære ligningssystem, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Resultaterne anvendes i Afsnit 6.2.1 i forbindelse med definitionen på egenverdier/egenvektorer.

Definition A.4 (Lineær uafhængighed)

En samling af vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ kaldes *lineært uafhængige*, hvis og kun hvis vektorligningen

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

kun har den trivielle løsning

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Sætning A.3 (Løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$)

Det homogene lineære ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning, hvis og kun hvis søjlerne i A er lineært uafhængige.

BEVIS: Idet vi husker på, at matrixligningen kan omskrives til en vektorligning, må der gælde følgende af Definition A.4, at hvis søjlerne i A er lineært uafhængige, eksisterer der kun den

trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Omvendt, hvis ligningssystemet har ikke-trivielle løsninger medfører dette ifølge Definition A.4, at søjlevektorerne er lineært afhængige. ■

Sammenfattende kan vi formulere følgende sætning, idet en lineært afhængig mængde af vektorer er en mængde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, hvor der kan opstilles en sammenhæng $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, således at ikke alle $c_i \in \mathbb{R}$ er nul.

Sætning A.4 (Løsninger for homogent ligningssystem)

Lad A være en kvadratisk matrix. Givet det homogene lineære ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er følgende udsagn ækvivalente:

1. Ligningssystemet har ikke-trivielle løsninger,
2. Mængden af søjler i A er et lineært afhængig,
3. A er ikke invertibel,
4. $\det A = 0$.

Beviset er ligetil og udelades derfor, idet vi ser, at invertibilitet og determinanter er knyttet til eksistens af ikke-trivielle løsninger. Udfra Sætning A.1 fremgår nemlig, at såfremt A er invertibel, er $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, den trivielle løsning, d.v.s. A kan ikke være invertibel.

APPENDIKS B

Komplekse tal

B.1 Kort introduktion til komplekse tal

Følgende appendiks er baseret på [Elbrønd96] og [Beachy96].

I abstrakt algebra bygger konstruktionen af de komplekse tals legeme på den utilfredsstillende situation, at polynomiet $x^2 + 1$ ikke har nogen rødder indenfor \mathbb{R} ; vi ønsker således at udvide de reelle tal til et legeme, hvor også rødder til negative tal er defineret. Dette er en instans af det generelle problem at finde *spaltningslegemer for irreducible polynomier over arbitrære legemer*. I dette tilfælde ønsker vi derfor at konstruere et udvidelseslegeme $L \supset \mathbb{R}$, således at $x^2 + 1$ spalter, d.v.s. kan faktoreres over L . Formelt set konstrueres da en unik algebraisk struktur knyttet til ringen $\mathbb{R}[x]$ ¹ og det irreducible polynomium — denne vil være isomorf (have samme struktur) som L , d.v.s. udfra denne kan f.eks. \mathbb{C} konstrueres². Det viser sig at være tilstrækkeligt at indføre et element i , der er rod i $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ og tilføje (adjungere) dette til \mathbb{R} med passende regneoperationer. For uddybning af det præcise konstruktionsproblem henvises til [Beachy96, p. 191 og p. 251]. I det følgende vil vi nøjes med nedenstående definition.

¹Mere præcist, mængden af polynomier med reelle koefficienter. Denne kan vises at være en særlig type generel algebraisk struktur, en kommutativ ring. Legemer er blot ringe, hvor multiplikative inverse og det multiplikative identitetslement eksisterer.

²En lettere metode er at vise isomorfi mellem et legeme af særlige 2×2 matricer og \mathbb{C} . Dette er dog ikke en generelt anvendelig metode.

Definition B.1 (Komplekse tal)

Mængden givet ved

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$

kaldes mængden af *komplekse tal*.

Kompositionsreglerne for komplekse tal defineres som følger

Addition: $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$

Multiplikation: $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$

Realdelen af et komplekst tal defineres som $\operatorname{Re}[z] = \operatorname{Re}[a+ib] = a$ og *imaginærdelen* som $\operatorname{Im}[z] = \operatorname{Im}[a+ib] = b.$

Sætning B.1 (\mathbb{C} er et legeme)

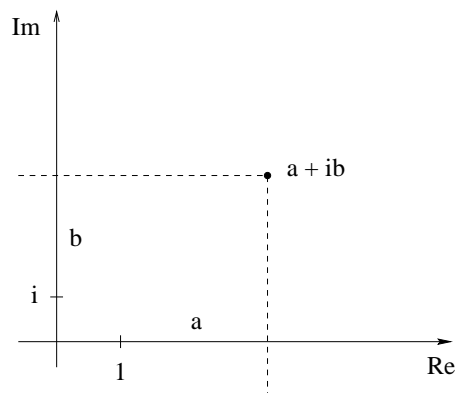
Mængden \mathbb{C} er et legeme.

Beviset følger umiddelbart idet legemesaksiomerne [Beachy96, pp. 160-161] ses at være opfyldt, d.v.s. \mathbb{C} er både en additiv og multiplikativ, abelsk gruppe, og den distributive lov gælder. Vi vil desuden indføre en særlig operation på komplekse tal kaldet *kompleks konjugering*

Definition B.2 (Kompleks konjugering)

Afbildningen $f : z = a + ib \in \mathbb{C} \rightarrow \bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$ kaldes *kompleks konjugering*.

Det er ikke overraskende, at vi kan betragte den endelige udvidelse $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ som et to-dimensionalt vektorrum (1 og i som basisvektorer) over de reelle tal. Dette motiverer en analog grafisk repræsentation af komplekse tal, nemlig som punkter i den komplekse plan, planen, hvor førsteaksen repræsenterer $\operatorname{Re}[z]$ og andenaksen imaginærdelen $\operatorname{Im}[z]$. Dette illustreres i Figur B.1. Som bekendt er et punkt (a, b) i xy -planen matematisk set ækvivalent med den tilsvarende vektor $\mathbf{u} = [a, b]$, svarende til $[|\mathbf{u}| \cos v, |\mathbf{u}| \sin v]$, hvor v er vinklen mellem førsteaksen og \mathbf{u} i positiv omløbsretning. Herudfra indføres den *polære form* for et komplekst tal tilsvarende.



Figur B.1: Den komplekse plan.

Definition B.3 (Polær form)

Den *polære form* for det komplekse tal $z = a + ib$ er givet ved

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

hvor $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kaldes *modulus* til z , $|z|$, og θ er argumentet til z , $\arg z$, vinklen målt mellem realaksen og $a + ib$ i den komplekse plan i positiv omløbsretning.

Som for polære koordinater i \mathbb{R}^2 , vil der *ikke* være entydig sammenhæng mellem det komplekse tal og den polære repræsentation, idet $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos(\theta + 2\pi) + i \sin(\theta + 2\pi))$. Lad os efterfølgende indføre den *komplekse eksponentialfunktion*.

Definition B.4 (Kompleks eksponentialfunktion)

For ethvert $z \in \mathbb{C}$ defineres den *komplekse eksponentialfunktion* som funktionen

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

BEMÆRKNING: Det bør bemærkes, at ovenstående *ikke* kan betegnes som en tilfredsstillende, naturlig indføring af den komplekse eksponentialfunktion. Formelt vil man stille en række krav til den komplekse eksponentialfunktion og vise, at den konvergente uendelige række

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{B.1})$$

alene tilfredsstillende disse betingelser.

Bemærk, at dette er analogt med definitionen af eksponentialfunktionen for reelle tal, idet

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ved opskrivning af eksponentialfunktionen til et imaginært tal, e^{iy} , genkendes rækkeudviklingen for funktionerne cosinus og sinus, og Definition B.4 følger.

Ovenstående bemærkning betyder samtidig, at den komplekse eksponentialfunktion kendetegnes ved alle de egenskaber, vi kender fra den reelle eksponentialfunktion. D.v.s. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ligeledes er differentiation analogt, idet $\frac{d}{dt}e^{Rt} = Re^{Rt}$, $t \in \mathbb{R}, R \in \mathbb{C}$. Dette kan vises direkte ud fra Definition B.4 og undlades.

Specielt for et imaginært tal, $z = iy$ ($\operatorname{Re}[z] = 0$), følger af Definition B.3 og B.4, at $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, d.v.s. en grafisk afbildning for denne funktion i den komplekse plan er enhedscirklen. Det ses da, at et arbitrært kompleks tal z på polær form kan skrives $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Sætning B.2 (Algebraens fundamentalsætning)

Ethvert polynomium med komplekse koefficienter af grad $n > 1$ har en kompleks rod.

Beviset for ovenstående er temmelig omfattende, og der henvises til f.eks. [Beachy96, p. 332] for et bevis v.h.a. abstrakt algebra. Det er imidlertid et interessant resultat, for det betyder, at vi kan være sikre på, at enhver rod i et polynomium med komplekse koefficienter virkelig er kompleks (d.v.s. der skal ikke konstrueres nye udvidelseslegemer for at repræsentere en givet rod).

Dette er nødvendig viden i følgende sætning.

Sætning B.3 (Polynomiumsligningen $x^n - 1 = 0$)

Polynomiumsligningen $z^n - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ har n forskellige rødder r_1, r_2, \dots, r_n , og hvor r_k , $1 \leq k \leq n$ er givet ved

$$r_k = (\cos \theta + i \sin \theta)^k = (e^{i\theta})^k, \quad \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

BEVIS: Det ses, at værdierne $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = (e^{i\theta})^k$ for $k = 1, 2, \dots, n-1$ er forskellige, og

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n = \left(e^{\frac{i \cdot 2k\pi}{n}} \right)^n = e^{i \cdot 2k\pi} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

Da et polynomium med komplekse koefficienter altid har netop n komplekse rødder (ved faktorisering og algebraens fundamentalsætning), har vi dermed fundet samtlige rødder. ■

Endelig vil vi i rapporten se nogle få eksempler på vektorer med komplekse komponenter. Ved dette forstås følgende.

Definition B.5 (Vektorer over \mathbb{C})

Ved en vektor over de komplekse tal forstås den ordnede liste

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \mathbf{v} \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^n.$$

De grundlæggende regneregler, addition, subtraktion o.s.v. for vektorer med komplekse komponenter følger af de tilsvarende operationer for vektorer over de reelle tal, idet real- og imaginærdelen af vektoren behandles for sig. D.v.s. Lad $v_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$ være en komponent i $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$; så kan \mathbf{v} skrives

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}.$$

Ovenstående motiverer desuden også til en definition af den *komplekst konjugerede vektor* svarende til den analoge for komplekse skalarer, d.v.s. den komplekst konjugerede vektor $\bar{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{a} + i\mathbf{b}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$.